Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

# Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

**Übungsblatt 8** 03.12.2015

---

**Aufgabe 29.** (Rang, Kern und Bild einer Matrix, 4 Punkte)
Gegeben sei folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & i & -1 \\ 1+i & 1 & 1+2i \\ 1-i & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

(a) den Rang von $A$,

(b) eine Basis von $\mathrm{im}(L_A)$, bestehend aus Spaltenvektoren von $A$,

(c) eine Basis von $\ker(L_A)$.

**Aufgabe 30.** (lineare Gleichungssysteme, 4 Punkte)
Für $r, s \in \mathbb{F}_2$ sei folgendes lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ gegeben:

$$\mathscr{S}_{r,s} := \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} X_1 & + & X_2 & & & & & + & X_5 & & & = & 1 \\ X_1 & + & X_2 & & & + & X_4 & + & & + & X_6 & = & 1 \\ & & X_2 & + & X_3 & & & + & X_5 & + & X_6 & = & 0 \\ X_1 & & & + & X_3 & + & X_4 & + & X_5 & + & rX_6 & = & s \end{array} \right.$$

(a) Bestimmen Sie $r, s \in \mathbb{F}_2$ derart, dass $\mathscr{S}_{r,s}$ keine Lösungen über $\mathbb{F}_2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie $\mathscr{L}(\mathscr{S}_{1,1})$. Wie viele Elemente hat diese Lösungsmenge?

**Aufgabe 31.** ($\mathbb{Q}$ vs $\mathbb{C}$, 3+1 Punkte)
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{Q})$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ Fortsetzungen der entsprechenden Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}$ sind, können wir $A$ auch als Matrix über $\mathbb{C}$ auffassen. Zeigen Sie, dass der Rang von $A$ als Matrix über $\mathbb{Q}$ und der Rang von $A$ als Matrix über $\mathbb{C}$ übereinstimmen.

(b) Seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{Q}^n$ und $V := \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}^n$. Wie in (a) können wir auch $v_1, \ldots, v_m$ als Vektoren in $\mathbb{C}^n$ auffassen. Zeigen Sie, dass für $V_{\mathbb{C}} := \langle v_1, \ldots, v_m \rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\dim_{\mathbb{Q}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}.$$

—— **bitte wenden** ——

**Aufgabe 32.** (Dualräume, 2+2 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und seien $V, W$ Vektorräume über $K$. Wir betrachten folgende Vorschrift:

$$\begin{aligned}\Phi : \operatorname{Hom}_K(V, W^*) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_K(W, V^*),\\ f &\longmapsto \Big(w \mapsto \big(v \mapsto (f(v))(w)\big)\Big).\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) $\Phi$ ist eine wohldefinierte Abbildung, d.h.

   (i) Für alle $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W^*)$ und $w \in W$ ist die Abbildung $(\Phi(f))(w) : V \to K$ linear.

   (ii) Für alle $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W^*)$ ist die Abbildung $\Phi(f) : W \to V^*$ linear.

(b) $\Phi$ ist ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen.

---

**Abgabe:** Am kommenden Donnerstag, den 10.12.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`