

## Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

### Präsenzaufgabenblatt 8

03.12.2015

#### Aufgabe P29. (Rang von Matrizen)

Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q}), \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{F}_2), \quad C := \begin{pmatrix} e & e & e & e & e \\ e & e & e & e & e \\ e & e & e & e & e \\ e & e & e & e & e \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}).$$

Hierbei bezeichnet  $e \in \mathbb{R}$  die Euler'sche Konstante.

#### Aufgabe P30. (lineare Gleichungssysteme)

Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{Q}$  für  $a \in \{0, 1\}$  und  $b \in \{0, 1\}$ :

$$\begin{cases} -X_1 & & + & X_3 & = & 2 \\ & X_2 & - & 2X_3 & = & 1 \\ & & & aX_3 & = & b \end{cases}$$

#### Aufgabe P31. (duale Basen)

Im reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  definieren wir folgende Vektoren:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  und  $\mathcal{C} := (w_1, w_2)$  Basen von  $\mathbb{R}^2$  sind.
- (b) Sei  $\mathcal{B}^* := (v_1^*, v_2^*)$  bzw.  $\mathcal{C} := (w_1^*, w_2^*)$  die duale Basis zu  $\mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{C}$ . Zeigen Sie, dass  $v_1^* \neq w_1^*$ , obwohl  $v_1 = w_1$  gilt.

#### Aufgabe P32. (Basiswechselmatrix von dualen Basen)

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Zeigen Sie:

- (a)  $(\text{id}_V)^* = \text{id}_{V^*}$ .
- (b) Ist  $\dim V < \infty$  und sind  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen von  $V$  mit den zugehörigen dualen Basen  $\mathcal{B}^*$  und  $\mathcal{C}^*$ , so ist  $S_{\mathcal{C}^*}^{\mathcal{B}^*} = ((S_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1})^t$ .

---

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra\\_WS2015\\_16](http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16)