Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 9 10.12.2015

Aufgabe 33. (Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$, 1+1+2 Punkte)
Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der in der Vorlesung vorgestellten Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ist die Relation
$$(a, s) \sim (b, t) \quad :\Longleftrightarrow \quad at - bs = 0$$
eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung – Sie dürfen folgendes verwenden: Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $xy = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

Eine **rationale Zahl** ist dann eine Äquivalenzklasse von $(a, s) \in \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Diese bezeichnen wir im folgenden mit der suggestiven Schreibweise $\frac{a}{s}$, d.h.
$$\frac{a}{s} := [(a, s)].$$
Ferner bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{Q}$.

(b) Die auf $\mathbb{Q}$ definierte Addition
$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) \longmapsto \frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st},$$
und Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) \longmapsto \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st},$$
sind wohldefiniert.

(c) Die Menge $\mathbb{Q}$ mit der soeben definierten Addition und Multiplikation bildet einen Körper.

Aufgabe 34. (Matrizenrechnungen über $\mathbb{F}_p$, 4 Punkte)
Für eine Primzahl p bezeichnen wir im folgenden mit einer ganzen Zahl n die zugehörige Restklasse $[n] \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Wir betrachten folgendes Zahlenschema:
$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & -5 & 5 \\ -4 & 2 & -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p den Rang von A, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{F}_p$, sowie eine Basis von $\operatorname{im}(L_A) \subseteq \mathbb{F}_p^4$, bestehend aus den Spalten von A.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst über $\mathbb{Q}$. Überlegen sie sich dann, inwiefern sich Ihre Rechnungen auf Matrizen über $\mathbb{F}_p$ übertragen lassen.

— bitte wenden —

Aufgabe 35. (Quotientenvektorraum und Komplement des Unterraums, 1+1+0,5+1,5 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Unterräume. Wir betrachten die Abbildung

$$q_U|_W : W \longrightarrow V/U,\ v \longmapsto [v] = v + U.$$

Zeigen Sie:

(a) $q_U|_W$ ist eine lineare Abbildung mit $\ker(q_U|_W) = U \cap W$.

(b) $q_U|_W$ ist genau dann surjektiv, wenn $V = U + W$.

(c) $q_U|_W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $V = U \oplus W$.

(d) Sei nun $K := \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^3$. Ferner seien

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$, und finden Sie das Urbild von $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \in V/U$ unter $q_U|_W$.

Aufgabe 36. (Dualraum und Quotientenvektorraum, 1+1,5+1,5 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Die zur Quotientenabbildung duale Abbildung $q_U^* : (V/U)^* \to V^*$ ist injektiv.

(b) $\operatorname{im}(q_U^*) = \{\pi \in V^* \mid \pi|_U = 0\}$. Hierbei bezeichnet $\pi|_U : U \to K$ die Einschränkung von $\pi : V \to K$ auf U, d.h. $\pi|_U(u) := \pi(u)$ für alle $u \in U$.

(c) Ist $\dim V < \infty$, so liefert

$$\Lambda_U : V^* / \operatorname{im}(q_U^*) \longrightarrow U^*, \quad [\pi] \longmapsto \pi|_U$$

einen wohldefinierten Isomorphismus.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 17.12.2015, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`