Markovketten und zufälliges Erzeugen
Aufgabenblatt 5

Abgabe bis 11.01.2016

Ausgabe am 07. Dezember 2015

Aufgabe 1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $q \geq 1$ eine ganze Zahl und Ω die Menge der gültigen q-Färbungen von G. Überprüfen Sie, dass die *Glauber dynamics* eine reversible Markovkette mit stationärer Verteilung $\pi = (1/|\Omega|)_{1 \leq i \leq |\Omega|}$ definiert.

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $q \geq \Delta(G) + 2$ und Ω die Menge der gültigen q-Färbungen von G. Zeigen Sie, dass *Glauber dynamics* eine irreduzible Markovkette auf Ω beschreibt.

Aufgabe 3. Sei $G = (V, E)$ ein (endlicher) Binärbaum, $q = 3$ und Ω die Menge der gültigen q-Färbungen von G.

a) Zeigen Sie, dass *Glauber dynamics* eine irreduzible Markovkette auf Ω definiert.

b) Lässt sich die Aussage für allgemeine Graphen und $q = \Delta(G)$ oder $q = \Delta(G) + 1$ verallgemeinern?

Aufgabe 4. Sei π eine Verteilung auf Ω und Ψ eine beliebige irreduzible Ω-wertige Übergangsmatrix. Sei

$$P(x, y) = \begin{cases} \Psi(x, y) \left[\frac{\pi(y)\Psi(y,x)}{\pi(x)\Psi(x,y)} \wedge 1 \right], & \text{falls } x \neq y \\ 1 - \sum_{z \neq x} \Psi(x, z) \left[\frac{\pi(z)\Psi(z,x)}{\pi(x)\Psi(x,z)} \wedge 1 \right], & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass P eine reversible Markovkette mit stationärer Verteilung π definiert.