10. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 14.12.2015

Abgabetermin: 11.1.2016, 10:00 – vor der Vorlesung

37i) Beweisen Sie den Satz von Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

ii) Geben Sie drei Zahlenpaare $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $b > 5$ an, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2.$$

Hinweis zu i): Es seien a, b die Längen der Katheten, und c sei die Länge der Hypotenuse. Zerlegen Sie ein Quadrat der Seitenlänge $a+b$ in ein Quadrat der Seitenlänge c und vier rechtwinklige Dreiecke, die alle kongruent zu dem gegebenen sind.

(6 Punkte)

38.) Es sei $B = \{v_1, ..., v_m\}$ eine Orthonormalbasis eines Vektorraumes $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i.$$

Hinweis: Es existieren $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot v_i$. Berechnen Sie $\langle v, v_j \rangle$ für alle j mit $1 \leq j \leq m$ – möglichst ohne von den gewöhnlichen Koordinatendarstellungen der Vektoren Gebrauch zu machen.

(4 Punkte)

39.) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ eine *orthogonale Matrix*; das heißt, es ist $A^T \cdot A = I_n$. Beweisen Sie:

i) Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

ii) Für alle Spaltenvektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$.

iii) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $||A \cdot v|| = ||v||$.

iv) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen in $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Stellen Sie dazu zunächst jeweils den ersten Spaltenvektor in Polarkoordinaten dar.

(6 Punkte)

40.) Stellen Sie die vier – im Dezimalsystem gegebenen – natürlichen Zahlen 365, 798, 2015 und 2016 im Dualsystem dar.

(4 Punkte)