Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 10 17.12.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 37. (Signum einer Permutation, 2+2 Punkte)

(a) Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ betrachten wir die Menge der **Fehlstände**

$$F(\sigma) := \{(i,j) \mid i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Zeigen Sie: $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\#F(\sigma)}$.

(b) Bestimmen Sie das Signum von $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$,

(i) indem Sie zuerst die Fehlstände von σ zählen und die Formel aus (a) anwenden.

(ii) indem Sie σ als Produkt von Transpositionen schreiben und ausnutzen, dass jede Transposition das Signum -1 hat.

Aufgabe 38. (Determinanten I, 2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B_t := \begin{pmatrix} t-1 & -2 & 4 \\ 1-t & t & -2 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{Q}$ beliebig.

(b) $M_x := \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$ für $x \in K$ beliebig.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 39. (Determinanten II, 2+1+1 Punkte)

Es seien $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ und $C \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Weiter sei

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{(m+n)\times(m+n)}(K).$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Determinante von M zu berechnen.

(a) Zeigen Sie, dass für $M' := \begin{pmatrix} B & A \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{(m+n)\times(m+n)}(K)$ gilt: $\det(M') = \det(B)\cdot\det(C)$.

(b) Bestimmen Sie das Signum von

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & m+n \\ n+1 & n+2 & \dots & n+m & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_{m+n}.$$

(c) Folgern Sie: $\det(M) = (-1)^{mn}\cdot\det(B)\cdot\det(C)$.

Aufgabe 40. (Gauß vs Cramer, 2+2 Punkte)

Lösen Sie über $\mathbb{Q}$ das lineare Gleichungssystem

$$\mathscr{S} := \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 & = & 3 \\ X_2 + X_3 & = & 2 \\ -X_1 + X_2 + 3X_3 & = & 1 \end{cases}$$

(a) mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

(b) mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 14.01.2016, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`