Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Weihnachtsblatt 17.12.2015

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper. Die anspruchsvolleren Aufgaben werden mit (*) gekennzeichnet.

Aufgabe W1.

Gegeben seien folgende Unterräume des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^5$:

$$U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}} \quad \text{und} \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}}$$

Finden Sie jeweils eine Basis und Dimension von U_1, U_2, $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$

Hinweis: Bringen Sie zunächst die Matrix, deren Spalten die U_1 und U_2 erzeugenden Vektoren sind, auf Zeilenstufenform. Was können Sie alles daraus ablesen?

Aufgabe W2.

Auf dem reellen Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir die Abbildung $\varphi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$(\varphi(f))(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{für alle } f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist ein (linearer) Projektor auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) $\ker(\varphi) = U_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}$.

(c) $\mathrm{im}(\varphi) = U_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$.

(d) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe W3.

Im reellen Vektorraum $V := \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}, \leq 3}$ der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 definieren wir folgende Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ f \longmapsto (\varphi(f) : x \mapsto f(x+1)).$$

Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basis $\mathscr{B} := (e_0, \dots, e_3)$, wobei $e_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^j$ für $j = 0, 1, 2, 3$ ist.

Aufgabe W4.

Zeigen Sie, dass die Menge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{F}_2 \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_2)$$

zusammen mit der Matrixaddition und -multiplikation einen Körper mit vier Elementen bildet.

Aufgabe W5.

Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B} := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist, und bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ und $S_{\mathscr{B}}^{\mathscr{E}}$, wobei $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^3$ bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$, für die gilt:

$$Av_1 = v_1,\ Av_2 = v_2 \text{ und } Av_3 = -v_3.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Formel für Basistransformation.

(c) Sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ die Matrix aus Teil (b). Berechnen Sie A^7, wobei $A^7 = \underbrace{A \cdots A}_{\text{7-mal}}$.

Aufgabe W6.

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Ferner sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V mit der dualen Basis $\mathscr{B}^*$ und $\mathscr{C}$ eine von W mit der dualen $\mathscr{C}^*$. Wir erinnern uns an folgenden Isomorphismus aus der Aufgabe 32:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}_K(V, W^*) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W, V^*), \\ f &\longmapsto \Big(w \mapsto \big(v \mapsto (f(v))(w)\big)\Big). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W^*)$ gilt: $\mathrm{M}_{\mathscr{B}^*}^{\mathscr{C}}(\Phi(f)) = \mathrm{M}_{\mathscr{C}^*}^{\mathscr{B}}(f)^t$.

Aufgabe W7. (*)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und V^* der zugehörige Dualraum. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\pi_1, \ldots, \pi_n \in V^*$ definieren wir folgende Abbildung:

$$f : V \longrightarrow K^n,\ v \longmapsto \begin{pmatrix} \pi_1(v) \\ \vdots \\ \pi_n(v) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist eine lineare Abbildung.

(b) f ist genau dann nicht surjektiv, wenn $\pi_1, \ldots, \pi_n \in V^*$ linear abhängig sind.

Aufgabe W8.

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es sich im folgenden jeweils um eine Äquivalenzrelation handelt:

(a) In $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ gilt: A äquivalent zu B $(A \sim B) :\Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_m(K),\, T \in \mathrm{GL}_n(K) : B = SAT$.

(b) In $\mathrm{M}_n(K)$ gilt: A konjugiert zu B $(A \approx B) :\Leftrightarrow \exists S \in \mathrm{GL}_n(K) : B = SAS^{-1}$.

Aufgabe W9. (*)

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei V ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension n. Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Elemente von V.

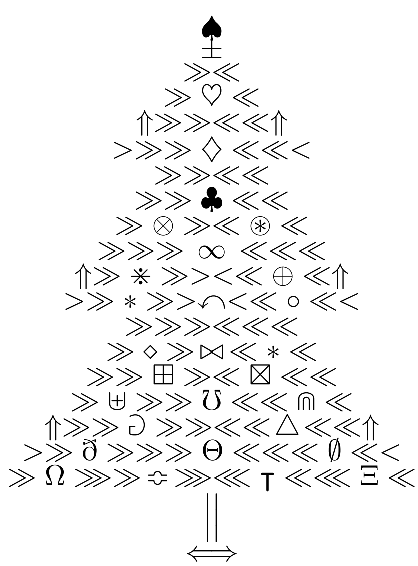
(b) die Anzahl der Basen von V.

(c) die Anzahl der Unterräume der Dimension m in V für ein festes $m \leq n$.

Aufgabe W10.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, \dots, x_n \in K$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$



—— Ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute im neuen Jahr! ——

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern dient nur zur eigenen Stoffwiederholung.
Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`