11. Übungsblatt zu der Vorlesung
"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 11.1.2016

Abgabetermin: 18.1.2016, 10:00 – vor der Vorlesung

41.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach unten bzw. nach oben beschränkt sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls jeweils – mit Begründung – das Infimum und das Supremum:

i) $M_1 := \{\frac{x}{x+1} \mid x > 0\}$;

ii) $M_2 := \{\frac{1}{1-cos(\alpha)} \mid 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$ – mit α im Bogenmaß;

iii) $M_3 := \{\frac{x}{y+1} \mid x, y \in \mathbb{R}^+\}$.

(6 Punkte)

42.) Für zwei nichtleere Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ setzen wir $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

i) Sind A und B nach unten beschränkt, so ist auch $A + B$ nach unten beschränkt, und es ist $inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$.

ii) Formulieren Sie eine entsprechende Aussage für nach oben beschränkte Mengen.

(3 Punkte)

43.) Berechnen Sie für jede der nachstehenden – konvergenten – Folgen den zugehörigen Grenzwert:

i) $a_n = \frac{-2n^2+7n-17}{n^2-3n+8}$;

ii) $b_n = \frac{n!}{n^n}$;

iii) $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

iv) $d_n = \frac{sin(\alpha \cdot n)}{n}$ – für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

(8 Punkte)

44.) Beweisen Sie:

i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $a > 0$ gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

ii) Zu jedem $b > 1$ und zu jedem $T > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ gilt:

$$b^n > T.$$

iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Folge $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(3 Punkte)