Sonderaufgaben zu der Vorlesung

"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 18.12.2015

Die vorliegenden Aufgaben, die sich auf die ersten 7 Kapitel der Vorlesung beziehen, dienen zur Vorbereitung auf die Klausur. – Das bedeutet aber nicht, dass anderer Stoff der ersten 7 Kapitel für die Klausur nicht relevant sein wird. Abgesehen von Aufgabe A) sind die Ergebnisse zu begründen.

A) Zu folgenden vier Fragen bzw. Aussagen sind jeweils zwei oder drei mögliche Antworten fixiert, von denen genau eine richtig ist. – Diese ist herauszufinden.

i) Jede linear abhängige Teilmenge eines n-dimensionalen Vektorraums besitzt mindestens...

a) ein Element. b) zwei Elemente. c) $n+1$ Elemente.

ii) Hat ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen überhaupt eine Lösung, so ist diese eindeutig bestimmt.

a) stimmt. b) stimmt nicht.

iii) Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ kann höchstens

a) $n-2$ b) n c) $2n$

Eigenwerte in $\mathbb{R}$ haben.

iv) Jede Matrix $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ hat mindestens einen reellen Eigenwert.

a) stimmt b) stimmt nicht.

B) Wie in den Bemerkungen 6.53) sei $J_3 := \{1,2,3\}$, und S_3 sei die Menge der Permutationen von J_3. Definiere $\sigma_0 \in S_3$ durch $\sigma_0(1) := 2$, $\sigma_0(2) := 3$, $\sigma_0(3) := 1$. Bestimmen Sie – mit Begründung – alle Permutationen $\sigma \in S_3$, die mit σ_0 *vertauschbar* sind; das bedeutet: $\sigma_0 \circ \sigma = \sigma \circ \sigma_0$.

(Hier steht z.B. $\sigma_0 \circ \sigma$ für $\sigma_0(\sigma)$ also für das Hintereinanderausführen der Permutationen.)

C) Bestimmen Sie – mit Begründung – alle reellen Zahlen a, so dass die drei Vektoren $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,4)$, $w_a = (1,3,a)$ linear abhängig sind.

D) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

i) $5x_1 + 3x_2 = 12 \quad \wedge \quad 7x_1 + 5x_2 = 9;$

ii) $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 25 \quad \wedge \quad 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 23 \quad \wedge \quad 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 16.$

E) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren der folgenden – symmetrischen – Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

F) Berechnen Sie – für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ – die Determinante der folgenden Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ 1 & -1 & -sin(\alpha) & cos(\alpha) \\ 1 & 1 & -cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 1 & -1 & sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

G) In dieser Aufgabe bezeichnen u, v, w Spalten-Vektoren in $\mathbb{R}^3$ – sowie u^T, v^T, w^T die transponierten Zeilen-Vektoren.

Das *Kreuz-Produkt* zweier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ist (bekanntlich) folgendermaßen definiert:

$$(a_1, a_2, a_3)^T \times (b_1, b_2, b_3)^T = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)^T.$$

Beweisen Sie:

i) $||u||^2 \cdot ||v||^2 = |\langle u, v\rangle|^2 + ||u \times v||^2$.

ii) $\langle u, v \times w\rangle = det(u, v, w)$.

iii) $||v \times w|| = ||v|| \cdot ||w|| \cdot sin(\measuredangle(v, w))$.

Insbesondere ist $||v \times w||$ der Flächeninhalt des von den Vektoren v und w aufgespannten Parallelogramms, falls diese linear unabhängig sind.

iv) Es sei $v \neq 0$ und $w \neq 0$. Dann ist $v \times w$ sowohl zu v als auch zu w orthogonal.

H) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $v_2 = (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$ in $\mathbb{R}^3$.

Gibt es einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass die Menge $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis ist? Falls ja ist ein solcher Vektor v_3 anzugeben.