Algebraische Zahlentheorie

Blatt 4+5 — 12.01.2016

Aufgabe 16. (Minkowskischer Linearformensatz)

Seien für $i = 1, \ldots, n$ Linearformen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ und $\det(a_{ij}) \neq 0$ gegeben.

Zeigen Sie, daß es zu positiven reellen Zahlen $C_1, \ldots, C_n$ mit

$$\prod_{i=1}^n C_i > |\det(a_{ij})|$$

stets $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ verschieden von 0 gibt mit $|f_i(x)| < C_i$ für alle $1, \ldots, n$.

Aufgabe 17. (Die Maximalordnung in quadratischem Zahlkörper)

Sei $d \neq 1$ quadratfrei und $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - d)$. Zeigen Sie:

(a) Die Diskriminante Δ_F der Maximlaordnung $\mathfrak{o}_F \subseteq F$ ist:

$$\Delta_F = \begin{cases} 4d & d \not\equiv 1 \pmod 4 \\ d & d \equiv 1 \pmod 4). \end{cases}$$

(b) Es gilt in jedem Fall $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z}[\frac{\Delta_F + \sqrt{\Delta_F}}{2}]$.

(c) Die algebraische Struktur der Einheitengruppe ist eine der folgenden:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von d, welcher Fall vorliegt.

Aufgabe 18. (Eine Quadratische Algebra mit Diskriminante 1)

Für $d = 1$ betrachten wir $F = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1)$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $F \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, wobei X im ersten Faktor den Wert 1 und im zweiten Faktor den Wert -1 annimmt.

(b) Der ganze Abschluß von $\mathbb{Z} \subseteq F$ ist $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(c) Die Spur $\mathrm{tr} : F \to \mathbb{Q}$ liefert eine nicht-ausgeartete Spurform auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum F. Die Diskriminante des Gitters $\mathfrak{o}_F$ bezüglich dieser Spurform ist $\Delta_F = 1$.

Bemerkung: Die Spur von $a \in F$ ist $\mathrm{tr}(a) = \mathrm{tr}(a\cdot : F \to F)$ aufgefaßt als $\mathbb{Q}$-linearer Endomorphismus von F.

Aufgabe 19. (Ordnungen in quadratischen $\mathbb{Q}$-Algebren via Diskriminante)

(a) Sei $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $D \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$. Wir setzen $F = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - D)$ und $\mathfrak{o}_D = \mathbb{Z}[\frac{D+X}{2}]$.

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{o}_D$ eine Ordnung von Diskriminante D ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Diskriminante ein Bijektion der folgenden Mengen beschreibt:

(O) Ordnungen $\mathfrak{o} \subseteq F$ bis auf Isomorphie, wobei F ein quadratischer Zahlkörper oder $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist.

(D) Ganze Zahlen $\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\delta \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, daß die Diskriminante der Ordnung $\mathfrak{o}$ den quadratischen Zahlkörper F beziehungsweise $F = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt. Zeigen Sie weiter, daß $\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{o}$ stets ein direkter Summand als abelsche Gruppe ist. Wenn $\mathfrak{o}_F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot \alpha$ und $N = (\mathfrak{o}_F : \mathfrak{o})$, dann gilt $\mathfrak{o} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot (N\alpha)$.

Aufgabe 20.

(a) Zeigen Sie, daß für $d \in \{-1, -2, -3, -7, -11\}$ der Ring der ganzen Zahlen in $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ euklidisch bezüglich der euklidischen Norm $\delta = N_{F/\mathbb{Q}}$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß für d quadratfrei, negativ und $\notin \{-1, -2, -3, -7, -11\}$ der Ring der ganzen Zahlen in $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ nicht euklidisch bezüglich der euklidischen Norm $\delta = N_{F/\mathbb{Q}}$ ist.

Aufgabe 21.

Zeigen Sie, daß $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ die Klassenzahl 1 hat. *Anleitung:*

(a) Berechnen Sie zu einer beliebigen Idealklasse $\alpha \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_F)$ eine obere Schranke für die Norm $N(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus α.

(b) Finden Sie eine kleine Liste von Primidealen $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}_F$, deren Klassen die Klassengruppe $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_F)$ erzeugen.

(c) Zu jedem $(p) = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$ aus der Liste zeigen Sie, daß $\mathfrak{o}_F/p\mathfrak{o}_F$ ein Körper ist. Dazu bestimmen Sie $\mathfrak{o}_F \simeq \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 41)$ und betrachten $X^2 - X + 41$ modulo p.

Aufgabe 22.

(a) Sei F ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{o}_F$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}^n = (a)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_E$ ein Hauptideal ist im Ganzzahlring zum Körper $E = F(\sqrt[n]{a})$.

(b) Sei F ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie, daß es eine endliche Körpererweiterung E/F gibt, so daß jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}_F$ in $\mathfrak{o}_E$ ein Hauptideal wird, das heißt $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_E$ ist Hauptideal für alle $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{o}_F$.

Aufgabe 23.

Bestimmen Sie jeweils die Idealklassengruppe der folgenden Zahlkörper.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-39})$,

(b) alle reell-quadratischen Zahlkörper F mit Diskriminante $d_F \leq 20$,

(c) und $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.

Tipp: Bestimmen Sie die Schranke für die Norm eines Vertreters für Idealklassen. Für jeden möglichen Wert N berechnen Sie den Ring $\mathfrak{o}_F/N\mathfrak{o}_F$ und schließen dann auf die Existenz oder Nichtexistenz von Idealen mit gegebener Norm.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 18.01.2016, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/57777299/Algebraische-Zahlentheorie_WS2015_16
