Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 11 14.01.2016

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 41. (Determinanten III, 2+2 Punkte)

Wir definieren folgende Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A_n)$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass A_3 invertierbar ist, und bestimmen Sie A_3^{-1} anhand der Determinanten.

Aufgabe 42. (Minoren und Rang, 1+1+1+1 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n \times m}(K)$. Ferner sei $1 \le r \le \min\{m, n\}$.

(a) Seien $I \subseteq I' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $J \subseteq J' \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{rg}(A_{IJ}) \le \mathrm{rg}(A_{I'J})$ und $\mathrm{rg}(A_{IJ}) \le \mathrm{rg}(A_{IJ'})$ gelten.

(b) Folgern Sie: Besitzt A einen $(r \times r)$-Minor ungleich Null, so ist $\mathrm{rg}(A) \ge r$.

(c) Sei $J = \{j_1 < \ldots < j_r\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ derart, dass die Spalten $Ae_{j_1}, \ldots, Ae_{j_r}$ von A linear unabhängig sind (hierbei bezeichnet e_j den j-ten Standardbasisvektor von K^m). Zeigen Sie, dass man r linear unabhängige Zeilen aus der Matrix $[Ae_{j_1}, \ldots, Ae_{j_r}]$ wählen kann.

(d) Folgern Sie:

$$\mathrm{rg}(A) = \max(\{r \; ; \; A \text{ hat einen } (r \times r)\text{-Minor ungleich Null}\} \cup \{0\}).$$

— bitte wenden —

Aufgabe 43. (Eigenwerte, 1+3 Punkte)

Gegeben sei

$$\Phi : \mathrm{Abb}(K,K) \to \mathrm{Abb}(K,K), \quad f \mapsto (\Phi f : x \mapsto x \cdot f(x)).$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ einen Endomorphismus auf dem K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(K,K)$ definiert.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von Φ sowie die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 44. (Polynome und Polynomfunktionen, 4 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$\Psi : K[X] \to \mathrm{Abb}(K,K), \ f \mapsto (\lambda \mapsto f(\lambda)).$$

Zeigen Sie:

(a) Ψ ist genau dann injektiv, wenn K unendlich ist.

(b) Ψ ist genau dann surjektiv, wenn K endlich ist.
Hinweis: Benutzen Sie für eine Richtung die Aufgabe 28.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 21.01.2016, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`