Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Präsenzaufgabenblatt 11 14.01.2016

Aufgabe P41. (Permutationsmatrizen)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zur Permutation $\sigma \in S_n$ betrachten wir die Matrix

$$P_\sigma := (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathrm{M}_n(K).$$

Zeigen Sie:

(a) P_σ hat in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1.

(b) Bezeichnet $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n, so ist $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

(c) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt: $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$.

(d) P_σ ist invertierbar und $\det(P_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$.

Aufgabe P42. (Determinanten und Invertierbarkeit)

Untersuchen Sie anhand der Determinante, ob folgende Matrizen invertierbar sind, und berechnen Sie ggf. deren Inverse:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}),\ B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_5),\ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$$

Aufgabe P43. (Polynomdivisionen mit Rest)

Bestimmen Sie im folgenden zu gegebenen $f, g \in K[X]$ die Polynome $q, r \in K[X]$, so dass $f = gq + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$:

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$, $g = X + 1$.

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $f = X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + X - 1$, $g = X^2 + X - 1$.

Aufgabe P44. (Linearfaktorzerlegungen)

Zerlegen Sie folgende Polynome über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

(a) $f = X^3 + X^2 - 8X - 12$.

(b) $g = X^4 - 3X^2 + 6X - 2$.

Hinweis: Eine Nullstelle von g ist $1 + i$.

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`