12. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 18.1.2016

Abgabetermin: 25.1.2016, 10:00 – vor der Vorlesung

45.) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \tfrac{3}{2}\,,\ a_{n+1} := \tfrac{a_n}{2} + \tfrac{1}{a_n} \ \text{ für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie:

i) $a_n^2 \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und folglich konvergent; die letzte Aussage muss dabei auch begründet werden.

iii) Es gilt: $lim_{n\to\infty}\, a_n = \sqrt{2}$.

iv) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4 – sowohl exakt als Brüche als auch in der Dezimaldarstellung auf (mindestens) 8 Stellen hinter dem Komma. – Hier soll natürlich ein Taschenrechner benutzt werden.

(6 Punkte)

46.) Beweisen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt{2}$ *irrational* ist; das heißt: Es gibt keine ganzen Zahlen a, b mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Man kann dazu annehmen, dass natürliche Zahlen a, b mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ existieren, von denen mindestens eine ungerade ist; dies ist aber zu begründen. Schließen Sie weiter, dass dann a gerade sein muss. Testen Sie schließlich die natürlichen Zahlen a^2 und $2 \cdot b^2$ auf deren Teilbarkeit durch 4.

(3 Punkte)

47.) Für festes $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $f = f_a : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \tfrac{x^2+5x+a}{x-1}\ .$$

i) Begründen Sie, dass f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

ii) Bestimmen Sie – mit Begründung – alle reellen Zahlen a, für die f_a auch an der Stelle $x_0 = 1$ stetig fortgesetzt werden kann.

(3 Punkte)

48.) Die Polynom-Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$P(x) := x^3 - 4x^2 - 3x.$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen von P sowie Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte. Skizzieren Sie schließlich diese Funktion.

(8 Punkte)