# § 8 Grundlagen der Analysis

**Bemerkungen 8.1:**

i) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

$n!$ wird gelesen als „$n$ Fakultät".

Beispiele: $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24.$

Für $n \geq 1$ gilt offensichtlich folgende Rekursionsformel:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Damit diese Formel auch für $n = 0$ Sinn macht, setzt man zusätzlich: $0! := 1.$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ die Anzahl der Permutationen von $I_n = \{1, \dots, n\}$; das sind die Bijektionen $\sigma : I_n \to I_n$.

ii) Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ ist der <u>Binomialkoeffizient</u> $\binom{n}{k}$ gegeben durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad . \qquad \text{| gelesen: „}n\text{ über }k\text{"}$$

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge.

Zum Beispiel gibt es beim Lotto „6 aus 49" genau

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

Möglichkeiten.

Weiter gilt für alle $n \geq 0$: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$

**Lemma 8.2:**

i) Für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

ii) Für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Beweis:**

i) ist klar aufgrund der Definition von $\binom{n}{k}$.

ii) Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} \\
&= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 8.3:**

Nach Lemma 8.2 ii) können die Binomialkoeffizienten in folgendem Pascal'schen Dreieck angeordnet werden, in dem jeder Koeffizient, der nicht am Rand steht, die Summe der zwei diagonal darüber = stehenden Elemente ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

<u>Bemerkung 8.4, Das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion</u>

Es sei $A(n)$ eine Aussageform - für $n \in \mathbb{N}$. Es gelte:

(I) $A(1)$ ist wahr.

(II) <u>Wenn</u> $A(n)$ wahr ist, <u>dann</u> ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Demgemäß verläuft das Prinzip des Beweises durch Vollständige Induktion nach folgendem Schema:

i) <u>Induktionsverankerung:</u>

Zeige: $A(1)$ ist wahr.

ii) <u>Induktionsschritt:</u>

Zeige: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Sind i) und ii) erfolgreich durchgeführt, so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

<u>Bemerkung 8.5:</u>

Für <u>jede</u> reelle Zahl $x$ setzen wir: $x^0 := 1$.

**Satz 8.6, Der Binomische Lehrsatz:**

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} .$$

**Beweis durch Vollständige Induktion:**

**Induktionsverankerung:**

Zeige die Behauptung für $n=1$:

Die behauptete Gleichung ist:

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} \cdot x^0 \cdot y + \binom{1}{1} \cdot x^1 \cdot y^0 .$$

Beide Seiten stimmen mit $x+y$ überein.

**Induktionsschritt:**

Wir nehmen an, die Formel gilt für $(x+y)^n$ – und zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt.

Unsere Induktionsannahme besagt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} .$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $x+y$ liefert:

$$(x+y)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

$$(k=j-1)$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \cdot x^j \cdot y^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1} + \binom{n}{n} \cdot x^{n+1} \cdot y^0$$

$$+ \binom{n}{0} \cdot x^0 \cdot y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot x^{k} \cdot y^{(n+1)-k} + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^{k} \cdot y^{(n+1)-k} + y^{n+1} \quad \text{(nach Lemma 8.2 ii))}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^{k} \cdot y^{(n+1)-k} .$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen. $\square$

<u>Bemerkung 8.7, Dezimaldarstellung reeller Zahlen</u>

i) Die <u>Ziffernmenge</u> $S_{10}$ ist gegeben durch

$$S_{10} := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

ii) Zu jeder natürlichen Zahl $n$ existieren eindeutig bestimmte $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 0$ sowie eindeutig bestimmte Ziffern $a_0, \dots, a_m \in S_{10}$ mit $a_m \neq 0$ und

$$n = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i .$$

iii) Zu jeder reellen Zahl $x$ mit $0 < x < 1$ existieren - nicht notwendig eindeutig bestimmte - Ziffern $b_i \in S_{10}$ für $i \in \mathbb{N}$ mit:

$$x = b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i} .$$

<u>Beispiele</u>:

i) $457 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$

ii) $\pi = 3{,}14159\ldots = 3 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + \ldots$

**Bemerkung 8.8:**

Auch für andere Basis-Zahlen $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und jedes reelle $x > 0$ existieren g-adische Entwicklungen der Gestalt

$$g = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot g^{i} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot g^{-j}$$

mit $a_i, b_j \in S_g := \{0, 1, \dots, g-1\}$ für alle Indizes $i, j$.

Im Falle $g = 2$ spricht man auch von der Dualdarstellung, im Falle $g = 16$ von der Hexadezimaldarstellung.

**Beispiel:**

Wir wollen die Zahl 457 im Dualsystem darstellen. Dazu subtrahieren wir der Reihe nach die größtmöglichen Zweierpotenzen von den noch zu entwickelnden Zahlen, bis wir eine Summe von lauter Zweierpotenzen (womöglich inklusive $2^0$) erhalten:

$$\begin{aligned} 457 &= 256 + 201 \\ &= 2^8 + 128 + 73 \\ &= 2^8 + 2^7 + 64 + 9 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 . \end{aligned}$$

Häufig werden die Ziffern in $S_2$ auch mit 0 und 1 bezeichnet, damit erhalten wir:

$$457 = 111001001 \quad .$$

## Konvention 8.9:

Im folgenden setzen wir

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

## Bemerkung 8.10, Die Archimedische Eigenschaft:

Sind $x, y \in \mathbb{R}^+$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$.

## Bemerkung 8.11:

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der Absolutbetrag $|x|$ gegeben durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| \geq 0$. Ferner gilt: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

iii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Verifikation von iii):

Es ist sowohl $x+y \leq |x|+|y|$ als auch $-x-y \leq |x|+|y|$.

Damit folgt auch:

$$|x+y| = \max(x+y, -x-y) \leq |x|+|y|.$$

## Konvention 8.12:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ setzen wir:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ - abgeschlossenes Intervall

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ - offenes Intervall

$$\left.\begin{array}{l} (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \end{array}\right\} \text{halboffene Intervalle}$$

Definition 8.13:

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben bzw. nach unten beschränkt, falls ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$a \leq s \text{ für alle } a \in A \quad \text{bzw.} \quad a \geq s \text{ für alle } a \in A.$$

Solch eine Zahl $s$ heißt obere bzw. untere Schranke von $A$.

$A$ heißt beschränkt, wenn $A$ nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispeile:

i) Jedes Intervall ist beschränkt.

ii) $\mathbb{N}$ ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt. $1$ ist untere Schranke von $\mathbb{N}$.

Bemerkung 8.14:

i) Jede beschränkte nichtleere Teilmenge $A$ von $\mathbb{R}$ besitzt eine - eindeutig bestimmte - größte untere Schranke $s_0$. Das heißt, es gilt:

$s_0 \leq a$ für alle $a \in A$,

$s \leq s_0$ für jede untere Schranke $s$ von $A$.

Wir schreiben dann auch: $\inf(A) := s_0$.

$\inf(A)$ heißt das Infimum von $A$.

## Konstruktion des Infimums in der Dezimaldarstellung

Wir nehmen an:
$0$ ist untere Schranke von $A$, $1$ jedoch nicht.

Ansonsten kann folgendes Verfahren auf die Menge
$$m + A := \{m + a \mid a \in A\}$$
für passendes $m \in \mathbb{Z}$ angewendet werden:

Schritt 1:
Sei $b_1 \in S_{10}$ maximal mit $b_1 \cdot 10^{-1} \leq a$ für alle $a \in A$.

Schritt $n$, $n \geq 2$:
Seien $b_1, \dots, b_{n-1} \in S_{10}$ bereits gewählt. Dann sei $b_n \in S_{10}$ maximal mit
$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 10^{-i} \leq a \text{ für alle } a \in A.$$

Auf diese Weise erhält man $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i}$ als größte untere Schranke von $A$.

ii) Analog besitzt jede beschränkte nichtleere Teilmenge $A$ von $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke $\sup(A)$, genannt das Supremum von $A$.

Beispiel:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann haben alle vier Intervalle $[a, b]$, $(a, b)$, $(a, b]$ und $[a, b)$ die „untere Grenze" $a$ als Infimum und die „obere Grenze" $b$ als Supremum.

**Definition 8.15:**

Eine **Folge reeller Zahlen** ist eine Abbildung mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und Wertebereich $\mathbb{R}$.

**Symbolische Schreibweisen:**

$$n \mapsto a_n \,, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

**Definition 8.16:**

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon): \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und sagen: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen a**.

**Standard-Beispiel 8.17:**

Sei $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $0$:

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich – aufgrund der Archimedischen Eigenschaft – ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

**Bemerkung 8.18:**

Nicht jede Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Grenzwert. Ist etwa $b_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

Hat eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt.

<u>Bemerkung 8.19:</u>

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine <u>konstante Folge</u>; das heißt, es gebe ein $a\in\mathbb{R}$ mit $a_n = a$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$.

<u>Satz 8.20, Rechenregeln für Grenzwerte:</u>

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$; sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

i) Die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind ebenfalls konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

ii) Es gelte zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ sowie $b\neq 0$. Dann konvergiert auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}.$$

<u>Beispiel:</u>

Es sei $a_n := \dfrac{5n^2 + 7n - 6}{n^2 - 2n + 5}$ für $n\in\mathbb{N}$.

Dann folgt aus den obigen Rechenregeln - zusammen mit dem Standard-Beispiel 8.17 und Bemerkung 8.19:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{7}{n}-\frac{6}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{7}{n}-\frac{6}{n^2}\right) : \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)$$

$$= 5 : 1 = 5 .$$

<u>Bemerkung 8.21:</u>

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq a\}$$

beschränkt; denn für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq a+1$ gilt:

$$x^2 \geq a^2 + 2a + 1 = a + \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > a .$$

Nach Bemerkung 8.14 ii) existiert also $b := \sup(A)$.
Wäre $b^2 < a$, so wäre auch noch $(b+\varepsilon)^2 < a$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$.
Wäre $b^2 > a$, so wäre auch noch $(b-\varepsilon)^2 > a$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$.
Folglich ist $b^2 = a$; das heißt:
Die Wurzel aus $a$ existiert in $\mathbb{R}^+$; es ist

$$\sqrt{a} = b = \sup(A).$$

<u>Beispiel:</u>

Sei $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zunächst erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$ folgt dann:

$$\sqrt{n} > \sqrt{N(\varepsilon)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also folgt auch für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$:

$$|a_n - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

<u>Definition 8.22:</u>

i) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt <u>monoton steigend</u> bzw. <u>monoton fallend</u>, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \le a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n \ge a_{n+1}.$$

ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>streng monoton steigend</u> bzw. <u>streng monoton fallend</u>, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n > a_{n+1}.$$

<u>Beispiele:</u>

Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$a_n := \frac{1}{n}, \quad b_n := -\frac{1}{n}, \quad c_n := (-1)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend; die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist weder monoton steigend, noch monoton fallend.

**Satz 8.23:**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt ist; das heißt, die Menge $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusätzlich monoton steigend, so konvergiert diese Folge gegen $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

ii) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so konvergiert sie gegen $\inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

**Beweis:**

i) Sei $s := \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es dann ein $N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $a_N > s-\varepsilon$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq N$ gilt dann:

$$s \geq a_n \geq a_N > s-\varepsilon,$$

also $|a_n - s| < \varepsilon$.

ii) wird analog bewiesen - oder mit Hilfe der Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf i) zurückgeführt.

□

**Definition 8.24:**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine <u>streng monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$</u>. Dann heißt die Folge $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine <u>Teilfolge</u> von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Beispiel:**

Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $m_n = n^2$ für $n\in\mathbb{N}$. Die Aufzählungen der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind dann wie folgt:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$$

## Satz 8.25:

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat eine Teilfolge, die monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beweis:

Wir setzen $B := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n > a_j \quad \text{für alle } j > n\}$ und unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $B$ ist unendlich.
   In diesem Fall gibt es eine streng monoton steigende Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B$. - Nach Definition von $B$ ist dann die Folge $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine (streng) monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Fall: $B$ ist endlich.
   In diesem Fall gibt es ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > n$ für alle $n \in B$. Wir konstruieren induktiv eine streng monoton steigende Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ wie folgt:
   Ist $n \geq 1$ und $m_n$ bereits definiert, so setze
   $$C_{n+1} := \{k \in \mathbb{N} : \ k > m_n, \ a_k \geq a_{m_n}\}.$$
   Wegen $m_n \geq m_1$ ist $m_n \notin B$. Nach Definition von $B$ folgt also: $C_{n+1} \neq \emptyset$. Sei $m_{n+1}$ die kleinste Zahl in $C_{n+1}$. Dann ist $m_{n+1} > m_n$ und
   $a_{m_{n+1}} \geq a_{m_n}$.
   Folglich ist $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\square$

**Definition 8.26:**

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen $a$ konvergiert.

**Beispiel:**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := (-1)^n \cdot (1+\frac{1}{n})$.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir weiter

$$b_n := a_{2n-1}, \quad c_n := a_{2n}.$$

Dann sind $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(-1-\frac{1}{2n-1}\right) = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1.$$

Folglich sind $-1$ und $1$ Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Einen Grenzwert besitzt diese Folge nicht.

Aus den Sätzen 8.23 und 8.25 folgt direkt

**Satz 8.27, Satz von Bolzano-Weierstraß:**

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

## § 9 Grenzwerte und Stetige Funktionen

**Definition 9.1:**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Berührungspunkt von $S$, falls gilt:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in S : \quad |x-a| < \delta.$$

Die Menge der Berührungspunkte von $S$ wird mit $\overline{S}$ bezeichnet.

**Bemerkungen 9.2:**

Es sei $S \subseteq \mathbb{R}$.

i) Es gilt stets: $S \subseteq \overline{S}$.

ii) Die Menge $\overline{S}$ heißt auch topologischer Abschluss von $S$.

iii) Ist $S$ beschränkt und nicht leer, so gilt:

$$\inf(S) \in \overline{S}, \quad \sup(S) \in \overline{S}.$$

**Beispiele:**

i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

ii) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Man sagt auch: Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$.

iii) Ist $S \subseteq \mathbb{R}$ endlich, so ist $\overline{S} = S$.

**Definition 9.3:**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in \overline{S}$. Wir sagen, dass der Grenzwert oder Limes $b$ von $f$ bei Annäherung von $x$ an $a$ existiert, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in S: \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Wir sagen dann auch:

$f(x)$ konvergiert gegen $b$ für $x \to a$.

Schreibweise: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x)$.

Bemerkung:

Ähnlich wie bei Folgen gilt:

Existiert ein Grenzwert, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Beispiel:

Definiere $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Dann ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 + 1 = 2$.

Satz 9.4 (siehe auch Satz 8.20):

Es seien $f, g: S \to \mathbb{R}$ Funktionen und $a \in \overline{S}$.

Weiter nehmen wir an, dass die Grenzwerte

$$b := \lim_{x \to a} f(x), \quad c := \lim_{x \to a} g(x)$$

existieren. Dann folgt:

i) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = b + c$,

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = b - c$,

$\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$.

ii) Es gelte zusätzlich $c \neq 0$. Setze dann

$$S' := \{x \in S \mid g(x) \neq 0\}.$$

Dann ist $S' \neq \emptyset$ und $a \in \overline{S'}$ sowie

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S'}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

<u>Satz 9.5:</u>

Es seien $S, T \subseteq \mathbb{R}$, und $f: S \to T$, $g: T \to \mathbb{R}$ seien Funktionen.

Wir nehmen ferner an:

Für ein $a \in \overline{S}$ existieren die Grenzwerte

$$b := \lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x), \quad c := \lim_{\substack{y \to b \\ y \in T}} g(y).$$

Dann gilt auch: $\quad c = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)).$

<u>Beweis:</u>

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$y \in T,\ |y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon.$$

Ferner gibt es ein $\eta > 0$ mit:

$$x \in S,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Zusammenfassend folgt – mit $y = f(x)$:

$$x \in S,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - c| < \varepsilon$$

wie gewünscht. $\square$

Definition 9.6:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f: S \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) Die Funktion $f$ heißt stetig in einem Punkt $a \in S$, falls gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Das bedeutet also:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in S: \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ii) $f$ heißt stetig auf $S$, falls $f$ in jedem Punkt $a \in S$ stetig ist.

Beispiele 9.7:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$.

i) Jede konstante Funktion $f: S \to \mathbb{R}$ ist **stetig**; dabei ist $f(x_1) = f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in S$.

ii) Die Funktion $id_S: S \to S$ ist stetig.

iii) Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

iv) Die Funktion sign: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die Funktion sign ist nicht stetig in $0$, aber stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aus Satz 9.4 folgt:

**Satz 9.8:**

Es sei $S \subseteq \mathbb{R}$, und $f, g: S \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Dann gilt:

i) Die Funktionen $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls auf $S$ stetig.

ii) Sei $S' := \{x \in S \mid g(x) \neq 0\}$. Ist $S' \neq \emptyset$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig auf $S'$.

**Bemerkung 9.9:**

Aus den Beispielen 9.7 i, ii) und Satz 9.8 folgt:

i) Jede Polynom-Funktion $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

ii) Es seien $P, Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynom-Funktionen mit $A := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Dann ist $\frac{P}{Q}$ stetig auf $A$.

Schließlich liefert Satz 9.5:

**Satz 9.10:**

Es seien $S, T \subseteq \mathbb{R}$, und $f: S \to T$, $g: T \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Dann ist auch $g \circ f: S \to \mathbb{R}$ stetig.

**Bemerkung 9.11:**

Es sei $f: S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und es sei $a \in \overline{S} \setminus S$. Ferner nehmen wir an:

Der Grenzwert $b := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x)$ existiert.

Dann besitzt $f$ eine stetige Fortsetzung
$\tilde{f}: S \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$\tilde{f}(x) := f(x)$ für $x \in S$, $\tilde{f}(a) := b$.

**Satz 9.12, Der Zwischenwertsatz:**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Ist $\gamma$ eine reelle Zahl, die zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.

Beweisskizze:

Aus Symmetriegründen nehmen wir an: $f(a) < \gamma < f(b)$.
Setze $A := \{x \in [a, b] : \; f(x) \leq \gamma\}$.
Für $c := \sup(A)$ folgt dann: $f(c) = \gamma$.

**Satz 9.13:**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann existieren $c_1, c_2 \in [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt: $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.
Das bedeutet: $f$ nimmt auf $[a, b]$ sowohl einen minimalen Wert als auch einen maximalen Wert an.

Beweis:

Aus Symmetriegründen reicht es, zu zeigen:

$$\exists c_2 \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b]: \qquad f(x) \leq f(c_2).$$

Wir zeigen zunächst:

$$T := f([a,b]) = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

ist nach oben beschränkt.

Andernfalls gäbe es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad f(a_n) > n$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n}$.

Aus der Stetigkeit von $f$ folgt dann:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_{m_n}).$$

Das widerspricht aber den Ungleichungen $f(a_{m_n}) > m_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $z_0 := \sup(T)$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = z_0$.

Wiederum aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt:

Es gibt eine konvergente Teilfolge $(x_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $c_2 := \lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n}$.

Dann folgt auch aus der Stetigkeit von $f$:

$$f(c_2) = \lim_{n\to\infty} f(x_{m_n}) = z_0 \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

$\square$

Aus den Sätzen 9.12 und 9.13 folgt direkt:

Satz 9.14:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $\text{Bild}(f) = f([a, b])$ ein abgeschlossenes Intervall.

Schließlich gilt auch noch

Satz 9.15:

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, und die Funktion $f: [a, b] \to [c, d]$ sei stetig und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}: [c, d] \to [a, b]$ stetig.