Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 12 21.01.2016

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 45. (charakteristische Polynome und Eigenwerte, 3+1 Punkte)

(a) Seien $a_1, \dots, a_n \in K$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 46. (Spur und Determinante eines Endomorphismus, 2+2 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Ferner sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit genau n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

(ii) $\det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(b) Finden Sie zwei komplexe (3×3)-Matrizen mit demselben Spektrum, aber verschiedenen Spuren und Determinanten.

Aufgabe 47. (Eigenraumzerlegung, 2+2 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus derart, dass $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie:

(a) f kann höchstens 1 und -1 als Eigenwerte haben.
Gibt es einen solchen Endomorphismus f, der nur 1 bzw. -1 als Eigenwert hat?

(b) Ist $1 \neq -1$ in K, so gilt: $V = V_1 \oplus V_{-1}$.

Zusatzfrage (Ohne Wertung): Was passiert, wenn $1 = -1$ in K gilt (z.B. wenn $K = \mathbb{F}_2$)?

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 48. (Fibonacci-Folge II, 1+1+2 Punkte)

Wir erinnern uns an folgende Notationen aus der Aufgabe 24: der reelle Unterraum $U \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ is gegeben durch

$$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}.$$

Ferner haben wir auf U den Automorphismus

$$\phi_l : U \longrightarrow U, \quad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \longmapsto \phi_l(x) := (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ_l sowie die Eigenwerte.

(b) Finden Sie eine Basis von U, bestehend aus Eigenvektoren von ϕ_l.
Geben Sie dabei die Eigenvektoren in der möglichst expliziten Form an!

(c) Die **Fibonacci-Folge** $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist gegeben durch folgende Rekursion:

$$f_1 := 1, \qquad f_2 := 1, \qquad \text{und} \qquad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Schreiben Sie die Fibonacci-Folge f als Linearkombination der Eigenvektoren aus Teil (b), und leiten Sie daraus die geschlossene Formel für f_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ her.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 28.01.2016, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`