13. Übungsblatt zu der Vorlesung
"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 25.1.2016

Abgabetermin: 1.2.2016, 10:00 – vor der Vorlesung

49.) Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sei definiert durch $f(x) := \sqrt{x}$. Verifizieren Sie – entweder direkt mittels der Definition der Ableitung oder mittels der Formel zur Berechnung von Ableitungen inverser Funktionen – dass f auf $\mathbb{R}^+$ differenzierbar ist und dass für alle $x > 0$ gilt: $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$.

(3 Punkte)

50.) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(I) f ist auf I *monoton steigend*; das heißt, für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \leq x_2$ ist auch $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(II) Für alle $x \in I$ ist $f'(x) \geq 0$.

Hinweis zu $(II) \Longrightarrow (I)$ *: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.*

(3 Punkte)

51.) Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$, definiert durch $f(x) := \sqrt{1-x^2}$.
Die folgenden einführenden Überlegungen müssen nicht weiter begründet werden; man sollte sich aber natürlich davon überzeugen:
Nach dem Satz von Pythagoras ist die zu f gehörige Kurve der vierte Teil einer Kreislinie. Für $0 < x < 1$ sei $A(x) := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq u \leq x,\, 0 \leq v \leq f(u)\}$, und $F(x)$ sei der Flächeninhalt von $A(x)$. Aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung folgt dann: $F'(x) = f(x)$. Andererseits setzt sich die Fläche $A(x)$ zusammen aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten-Längen $x, f(x)$ und einem Kreissektor, dessen Mittelpunktswinkel θ die Beziehung $sin(\theta) = x$ erfüllt. Der Flächeninhalt dieses Kreissektors ist $\frac{1}{2}\cdot\theta$, wobei θ im Bogenmaß anzusetzen ist.

i) Fertigen Sie zu obigen einführenden Überlegungen eine Skizze an.

ii) Es bezeichne $arcsin : [0,1] \to [0, \frac{1}{2}\cdot\pi]$ die Umkehrfunktion zu der – auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}\cdot\pi]$ definierten – Sinusfunktion. Mit obigen Bezeichnungen ist dann also $\theta = arcsin(x)$. Zeigen Sie aufgrund obiger Darlegung – zusammen mit Aufgabe 49.), dass $arcsin$ auf $[0,1)$ differenzierbar ist und dass für alle $x \in [0,1)$ gilt: $arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

iii) Zeigen Sie mittels ii), dass für alle $t \in [0, \frac{1}{2}\cdot\pi)$ gilt: $sin'(t) = cos(t)$.

Anmerkung: Aus der Periodizität der Funktionen sin und cos sowie aus der Formel $cos(t) = sin(\frac{1}{2}\cdot\pi - t)$ folgt weiter für **alle** $t \in \mathbb{R}$: $sin'(t) = cos(t)$, $cos'(t) = -sin(t)$.

(8 Punkte)

52.) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_0^2 (x^3 + x^2 - 1)dx$, *ii)* $\int_0^\pi x \cdot cos(x)dx$, *iii)* $\int_{-1}^3 cos(\pi\cdot(x^2 - x + 1))\cdot(2x-1)dx$.

(6 Punkte)