§ 10 Differentiation

Bemerkung 10.1:

Gegeben sei ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$. Für $x, x_0 \in I$ mit $x \neq x_0$ heißt die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$ eine Sekante. Deren Anstieg ist gegeben durch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Wird nun x_0 fixiert und $|x-x_0|$ immer kleiner, so nähert sich diese Sekante - im Idealfall - einer Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

Diese Beobachtung führt zu folgender

Definition 10.2:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

i) Für $x_0 \in I$ heißt f differenzierbar in x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert. Gegebenenfalls heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ mit der Steigung $f'(x_0)$, die also die Gleichung

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$$

hat, heißt dann die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

ii) f heißt <u>differenzierbar auf I</u>, falls f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.
Die Funktion $f': I \to \mathbb{R}$ heißt dann die <u>Ableitung von f</u>.

<u>Beispiel 10.3:</u>

Für feste $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := a \cdot x + b.$$

Der Graph zu f ist also eine Gerade g mit der Steigung a.
Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ folgt dann:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

Es ist also $f' \equiv a$, und für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ stimmt die zugehörige Tangente an f mit der Geraden g überein.

<u>Bemerkung 10.4:</u>

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, so ist f auch stetig in x_0.

<u>Beweisidee:</u>

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ kann nur existieren, wenn mit $x \to x_0$ auch $f(x) \to f(x_0)$ gilt.

Satz 10.5:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, es sei $x_0 \in I$, und $f, g: I \to \mathbb{R}$ seien Funktionen, die in x_0 differenzierbar sind.
Dann gilt:

i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0).$$

ii) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und zwar gilt die Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

iii) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0, und es gilt die Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Bemerkung 10.6:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^0 := 1$.
Somit gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n, m \geq 0$: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

Beispiel 10.7:

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := x^n$.
Wir zeigen durch Induktion nach n:

$$f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Induktionsverankerung:

Für $n = 1$ erhalten wir $f_1(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Beispiel 10.3 liefert:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$$

wie gewünscht.

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, die Behauptung gilt für f_n. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \cdot f_n(x)$. Somit folgt aus der Produktregel und der Induktionsannahme für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}'(x) = 1 \cdot f_n(x) + x \cdot f_n'(x)$$
$$= x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (1+n) \cdot x^n$$

wie gewünscht.

Satz 10.8, Die Kettenregel:

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, es sei $x_0 \in I$, und $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$ seien Funktionen. Sei f differenzierbar in x_0, und g sei differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist auch $g \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis:

Wir definieren die Hilfsfunktion $q: J \to \mathbb{R}$ durch

$$q(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0. \end{cases}$$

Dann ist q stetig in y_0. Weiter folgt:

$$\forall y \in J: \quad g(y) - g(y_0) = q(y) \cdot (y - y_0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in I: \quad g(f(x)) - g(f(x_0)) = q(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))$$

$$\Rightarrow \forall x \in I \setminus \{x_0\}: \quad \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = q(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nach Satz 9.5 ist $q \circ f$ stetig in x_0; also folgt:

$$(g\circ f)'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \left(q(f(x))\cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$= q(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

□

Beispiel:

Definiere die Polynom-Funktion $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$P(x) := (x^2-x+1)^4 .$$

Setzen wir $f(x) := x^2-x+1$ und $g(y) := y^4$, so folgt:

$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad P(x) = f(x)^4 = g(f(x))$$

$$\Rightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}: \quad P'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$= 4\cdot f(x)^3\cdot f'(x)$$

$$= 4\cdot (x^2-x+1)^3\cdot(2x-1).$$

Definition 10.9:

Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I\to\mathbb{R}$ eine Funktion, und x_0 sei ein <u>innerer Punkt von I</u>; das heißt, es gibt ein $\varepsilon>0$ mit: $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subseteq I$.

i) f hat ein <u>lokales Maximum in x_0</u>, falls ein $\varepsilon>0$ existiert mit:

$$f(x)\leq f(x_0) \quad \text{für alle } x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon].$$

Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ heißt dann <u>ein Hochpunkt von f</u>.

ii) f hat ein <u>lokales Minimum in x_0</u>, falls die Funktion $-f$ ein lokales Maximum in x_0 hat.

Gegebenenfalls heißt der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein Tiefpunkt von f.

Konvention 10.10:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt n mal differenzierbar auf I, falls alle Ableitungen

$$f^{(1)} := f', \; f^{(2)} := f'' := (f')', \ldots, f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$$

auf I existieren.

Ist überdies die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig auf I, so sagen wir: f ist n mal stetig differenzierbar.

Satz 10.11:

Es sei x_0 ein innerer Punkt eines Intervalls I, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar.

i) Hat f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so ist $f'(x_0) = 0$.

ii) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

iii) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis:

i) Wir nehmen an: f hat in x_0 ein lokales Maximum. Dann gibt es ein $\eta > 0$, so dass gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0 \text{ für alle } x \in [x_0 - \eta, x_0),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \leq 0 \text{ für alle } x \in (x_0, x_0 + \eta].$$

Nach Definition der Ableitung $f'(x_0)$ - die nach Voraussetzung existiert - ist das nur möglich, wenn gilt: $f'(x_0) = 0$.

ii) Wegen $f''(x_0) < 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so dass für alle $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in [x_0 - \eta, x_0): \quad f'(x) > 0,$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \eta]: \quad f'(x) < 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in [x_0 - \eta, x_0): \quad f(x) < f(x_0),$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \eta]: \quad f(x_0) > f(x).$$

(siehe auch Aufgabe 50)

iii) wird analog bewiesen - oder mittels $-f$ auf ii) zurückgeführt.

<u>Bemerkung 10.12:</u>

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar.

Ein innerer Punkt $x_0 \in I$ heißt <u>Wendestelle von f</u>, wenn die zugehörige Kurve dort das <u>Krümmungsverhalten</u> ändert - von <u>Rechtskrümmung</u> zu <u>Linkskrümmung</u> oder umgekehrt.

Es gilt folgende Kette von Implikationen:

$$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) \neq 0$$
$$\Rightarrow x_0 \text{ ist Wendestelle von } f$$
$$\Rightarrow f''(x_0) = 0.$$

Ist x_0 Wendestelle von f, so heißt der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein <u>Wendepunkt</u>.

Beispiel 10.13:

Definiere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^3$.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt dann:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2, \quad f''(x) = 6 \cdot x, \quad f'''(x) = 6 \neq 0.$$

Folglich ist $W = (0,0)$ der einzige Wendepunkt von f.

Satz 10.14, Der Satz von Rolle:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Beweis:

Nach Satz 9.13 existieren $c_1, c_2 \in [a,b]$, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt: $\quad f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.
Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: f ist konstant.
In diesem Fall ist $f' \equiv 0$, dann ist die Behauptung trivial.

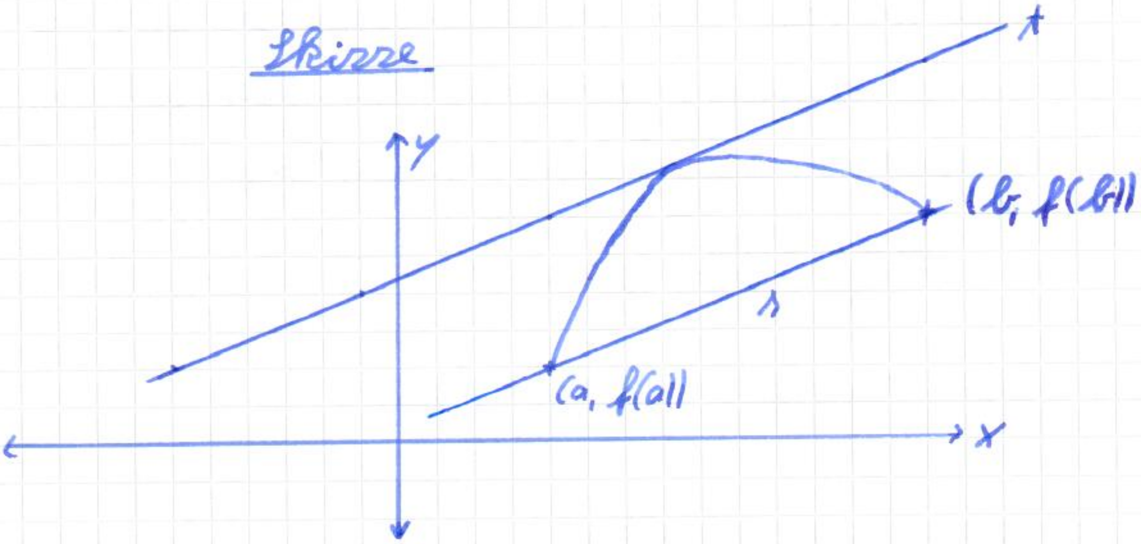
2. Fall: f ist nicht konstant.
In diesem Fall ist $f(c_1) < f(a) = f(b)$ oder $f(c_2) > f(a) = f(b)$.
Aus Symmetriegründen nehmen wir an: $f(c_2) > f(a) = f(b)$.
Dann ist $c_2 \in (a,b)$, und f hat in c_2 ein lokales Maximum. Damit liefert Satz 10.11 i): $\quad f'(c_2) = 0$. $\square$

Satz 10.15, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Skizze



Die Tangente t und die Sekante s haben den gleichen Anstieg.

Beweis:

Wir betrachten die Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Es folgt:

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Die Funktion g erfüllt also die Voraussetzungen des Satzes von Rolle; es gibt daher ein $c \in (a,b)$ mit $g'(c) = 0$. Das bedeutet:

$$f'(c) = g'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Korollar 10.16:

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall I, und für alle $x \in I$ gelte: $f'(x) = 0$. Dann ist f konstant.

Beweis:

Es seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist: $f(x_1) = f(x_2)$.
Wir wenden den Mittelwertsatz an auf die Einschränkung von f auf das Intervall $[x_1, x_2]$.
Es gibt demnach ein $c \in (x_1, x_2)$ mit:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 .$$

Damit folgt: $f(x_1) = f(x_2)$.

$\square$

Satz 10.17, Die Ableitung inverser Funktionen

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, und $f: I \to J$ sei eine differenzierbare und bijektive Funktion.
Ferner gelte für alle $x \in I$: $f'(x) \neq 0$.
Dann ist auch die inverse Funktion $g := f^{-1}: J \to I$ differenzierbar, und für alle $t \in J$ gilt:

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} .$$

Beweis:

Zunächst liefert Satz 9.15, dass g stetig ist. Damit folgt für gegebenes $t_0 \in J$ und $x_0 := g(t_0)$:

$$g'(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in J \setminus \{t_0\}}} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in J \setminus \{t_0\}}} \left(\left(\frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{g(t) - g(t_0)} \right)^{-1} \right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{f'(g(t_0))} .$$

$\square$

§ 11 Integralrechnung

Bemerkung 11.1:

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und es sei $I := [a, b]$.
Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
Für gegebene x_1, x_2 mit $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ kann der Fläche

$$A(f; x_1, x_2) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq u \leq x_2,\ 0 \leq v \leq f(u)\}$$

auf eindeutige Weise ein Flächeninhalt $F(f; x_1, x_2)$ zugeordnet werden, wenn nur folgende Mindest-Anforderungen gestellt werden:

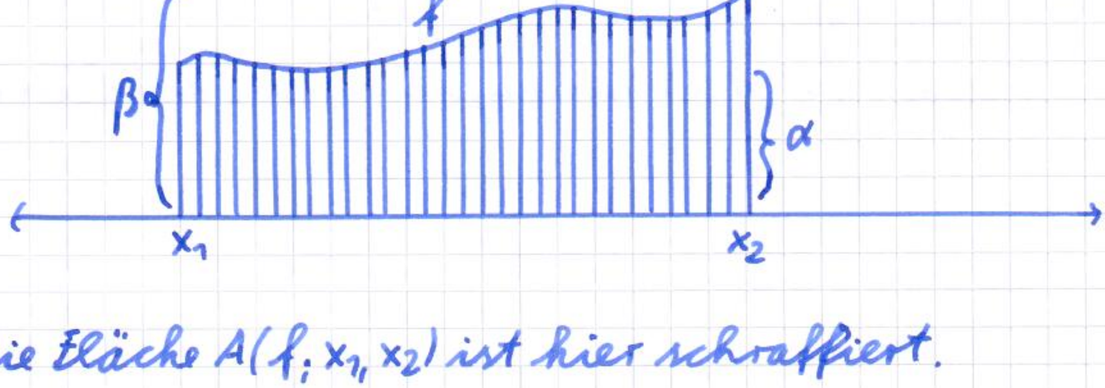
(F1) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \leq f(u) \leq \beta$ für alle $u \in [x_1, x_2]$, so gilt:

$$\alpha \cdot (x_2 - x_1) \leq F(f; x_1, x_2) \leq \beta \cdot (x_2 - x_1).$$

(F2) Ist $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$, so gilt:

$$F(f; x_1, x_3) = F(f; x_1, x_2) + F(f; x_2, x_3) .$$

Skizze



Die Fläche $A(f; x_1, x_2)$ ist hier schraffiert.

Definition 11.2:

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Eine ~~differenzierbare~~ Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt **eine Stammfunktion von f**, wenn $F' = f$ ist.

Beispiele:

i) Sei $n \in \mathbb{N}$, und $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f_1(x) := x^n$. Dann ist eine Stammfunktion $F_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu f_1 gegeben durch

$$F_1(x) := \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} .$$

ii) Die Sinus-Funktion ist Stammfunktion zu der Cosinus-Funktion; siehe auch Aufgabe 51.

Satz 11.3:

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall I, und $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ seien Stammfunktionen von f.
Dann ist $F_2 - F_1$ konstant.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt:

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0.$$

Damit folgt die Behauptung aus Korollar 10.16.

$\square$

Bereits jetzt können wir zeigen:

Theorem 11.4, Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $I := [a, b]$, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
Mit den Konventionen in Bemerkung 11.1 definieren wir $F: I \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := F(f; a, x)$.
$F(x)$ ist also der Flächeninhalt der Fläche, die begrenzt wird durch die x-Achse, durch die beiden senkrechten Geraden durch die Punkte $(a, 0)$ und $(x, 0)$ und durch den Graphen von f.
Dann ist F eine Stammfunktion von f.

Beweis:

Wir fixieren $x_0 \in I$ und müssen zeigen: $F'(x_0) = f(x_0)$.
Wir betrachten hier Differenzenquotienten der Gestalt $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ für $x > x_0$; der Fall $x < x_0$ verläuft analog.
(F2) liefert für $x_0 < x \leq b$:

$$F(x) - F(x_0) = F(f; a, x) - F(f; a, x_0) = F(f; x_0, x).$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 gibt es dann ein $\delta > 0$ mit:

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon < f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0) < f(x) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0).$$

Damit liefert (F1) weiter für $0 < x - x_0 < \delta$:

$$(-\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0)) \cdot (x - x_0) \leq F(f; x_0, x) \leq (\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0)) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0) \leq \frac{1}{x - x_0} \cdot F(f; x_0, x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + f(x_0)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{2}\cdot\varepsilon < \varepsilon.$$

$\square$

<u>Definition 11.5:</u>

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $I := [a, b]$, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Weiter sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist das <u>Integral</u> $\int_a^b f(x)\,dx$ definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

<u>Bemerkung 11.6:</u>

Ist $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ aufgrund folgender Überlegungen wohldefiniert:

i) Das Integral hängt nach Satz 11.3 nicht von der gewählten Stammfunktion F ab.

ii) Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so besitzt f nach Theorem 11.4 überhaupt eine Stammfunktion. Andernfalls definieren wir $f^+, f^-: [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in [a, b]$ ist dann $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ sowie $f^+(x) \geq 0$ und $f^-(x) \geq 0$.

Ist nun F^+ bzw. F^- eine Stammfunktion von f^+ bzw. f^-, so ist $F := F^+ - F^-$ eine Stammfunktion von f.

Bemerkung 11.7:

Er sei wieder $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

i) Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gibt der Wert $\int_a^b f(x)dx$ – nach Theorem 11.4 – den Flächeninhalt derjenigen Fläche an, die zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt.

ii) Ist dagegen $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so gibt $-\int_a^b f(x)dx$ diesen Flächeninhalt an.

iii) Im allgemeinen ist der Integrationsbereich $[a,b]$ aufzuspalten, um Flächeninhalte mittels Integralen zu berechnen.

Beispiel 11.8:

Wir berechnen den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := x \cdot (x-1) \cdot (x+2) = x^3 + x^2 - 2x$$

mit der x-Achse einschließt.

Eine Stammfunktion F zu f ist gegeben durch

$$F(x) := \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - x^2 .$$

Ferner hat f die Nullstellen $-2, 0, 1$.

Der gesuchte Flächeninhalt ist daher

$$\left| \int_{-2}^{0} f(x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} f(x)dx \right|$$

$$= |F(0) - F(-2)| + |F(1) - F(0)|$$

$$= |F(-2)| + |F(1)|$$

$$= \left|4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - 4\right| + \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right|$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32+5}{12} = 3\frac{1}{12} .$$

Satz 11.9:

Es seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis:

Es sei F bzw. G eine Stammunktion von f bzw. g.
Dann ist $\alpha \cdot F + \beta \cdot G$ eine Stammfunktion von $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$.
Damit folgt:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = (\alpha \cdot F(b) + \beta \cdot G(b)) - (\alpha \cdot F(a) + \beta \cdot G(a))$$
$$= \alpha \cdot (F(b) - F(a)) + \beta \cdot (G(b) - G(a)) = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

Satz 11.10, Die Partielle Integration:

Es seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = (f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx.$$

Beweis:

Nach der Produktregel gilt: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
Damit folgt:

$$\int_a^b (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))\,dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a).$$

Somit folgt auch die Behauptung.

$\square$

Beispiel:

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ setzen wir $f(x) = g(x) := \sin(x)$ für $x \in [a,b]$. Dann folgt:

$$\int_a^b \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx = \sin^2(b) - \sin^2(a) - \int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \cos(x) \cdot \sin(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2(b) - \sin^2(a)).$$

Bemerkung 11.11:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $a \leq \alpha < \beta \leq b$ setzen wir

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\, dx := 0, \quad \int_\beta^\alpha f(x)\, dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \quad .$$

Ist $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so folgt damit für alle $\alpha, \beta \in [a,b]$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Satz 11.12, Die Substitutionsregel:

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Weiter sei $f: [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar, und $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\, du.$$

Beweis:

Sei $G: [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von g.

Nach der Kettenregel folgt dann für alle $x \in [a,b]$:

$$(G \circ f)'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x).$$

Damit folgt:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = (G \circ f)(b) - (G \circ f)(a)$$

$$= G(f(b)) - G(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,du.$$

Nach Bemerkung 11.11 gilt die letzte Gleichung auch im Falle $f(b) \leq f(a)$.

$\square$

Beispiel:

Definiere $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ und $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sin(x), \quad g(u) := u^5.$$

Dann folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^5 \cdot \cos(x)\,dx = \int_0^1 u^5\,du = \frac{u^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$