Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 13 28.01.2016

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper.

Aufgabe 49. (Invariante Unterräume und simultane Diagonalisierbarkeit, 4 Punkte)

Auf einem K-Vektorraum V seien zwei Endomorphismen $f, g : V \to V$ mit $f \circ g = g \circ f$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{im}(g)$ ist ein f-invarianter Unterraum.

(b) $\ker(g)$ ist ein f-invarianter Unterraum.

(c) Für $\lambda \in K$ ist $V_\lambda(g)$ ein f-invarianter Unterraum.

(d) Ist $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ und besitzt g genau n verschiedene Eigenwerte, so sind f und g **simultan diagonalisierbar**, d.h. es gibt eine Basis von V, bezüglich derer die Darstellungsmatrizen von f und g gleichzeitig die Diagonalgestalt haben.

Bemerkung: Es ist a priori nicht klar, dass f ebenfalls diagonalisierbar ist!

Aufgabe 50. (Fahnensatz und obere Dreiecksmatrix, 1+3 Punkte)

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$$

(a) Zeigen Sie, dass χ_A vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(b) Finden Sie eine vollständige Fahne $0 = W_0 \subseteq W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 = \mathbb{Q}^3$ aus L_A-invarianten Unterräumen, und finden Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^3$, bezüglich derer die Darstellungsmatrix von L_A die obere Dreiecksgestalt hat.

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis des Fahnensatzes aus der Vorlesung.

— bitte wenden —

Aufgabe 51. (direkte Summen, 4 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, und seien $U_1, \ldots, U_r \subseteq V$ Unterräume. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$.

(b) $\dim(U_1) + \cdots + \dim(U_r) = \dim(V) = \dim(U_1 + \cdots + U_r)$.

(c) $\dim(U_1) + \cdots + \dim(U_r) = \dim(V)$ und $\forall\, k = 1, \ldots, r-1 : (U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1} = 0$.

(d) $V = U_1 + \cdots + U_r$ und $\forall\, k = 1, \ldots, r-1 : (U_1 + \cdots + U_k) \cap U_{k+1} = 0$.

Hinweis: Die Formel aus der Aufgabe 18 könnte hilfreich sein.

Aufgabe 52. (Diagonalisierbarkeit, 1,5+2,5 Punkte)

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A mit den algebraischen Vielfachheiten und zugehörigen Eigenräumen. Ist A diagonalisierbar?

(b) Zeigen Sie, dass A als Matrix über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1}AS$ die Diagonalgestalt hat. Geben Sie auch die Matrix $S^{-1}AS$ explizit an.

Erinnerung

Die Klausur findet am **Donnerstag, dem 18.02.2016, von 9:30 bis 11:30** statt.

Wer die Klausur mitschreiben möchte, meldet sich bitte bis spätestens **Mittwoch, den 10.02.2016,** unter `http://anmeldung.math.uni-frankfurt.de` zur Klausur an.

Alle Informationen zur Klausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Dort werden dann auch die Räume für die Klausur bekannt gegeben.

Abgabe: Am kommenden Donnerstag, den 04.02.2016, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/57776787/Lineare-Algebra_WS2015_16`