14. und letztes Übungsblatt zu der Vorlesung
"Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

Frankfurt, den 1.2.2016

Abgabetermin: 8.2.2016, 10:00 – vor der Vorlesung

53.) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := e^x \cdot sin(x)$.

i) Berechnen Sie $\int_a^b f(x)dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die der Graph zu f *auf dem Intervall* $[0, 2\pi]$ mit der $x-$ Achse einschließt.

(6 Punkte)

54.) Es sei $a \in \mathbb{R}^+$, und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Ferner sei f *ungerade*; das heißt, für alle $x \in [-a, a]$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

i) Beweisen Sie, dass jede Stammfunktion F von f *gerade* ist; das heißt, für alle $x \in [-a, a]$ gilt: $F(-x) = F(x)$.

ii) Verifizieren Sie: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

(3 Punkte)

55.) Beweisen Sie – ausgehend von den Potenzreihen-Darstellungen der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen – die *Eulersche Formel*: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{i \cdot t} = cos(t) + i \cdot sin(t).$$

(3 Punkte)

56.) Wir betrachten die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n \geq 0}$, die rekursiv durch folgende Vorschriften definiert ist:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ für } n \geq 0.$$

i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Es gilt $f_n \leq 2^n$ für alle $n \geq 0$.

ii) Die *erzeugende Funktion* Q der Fibonacci-Folge ist definiert durch

$$Q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n.$$

Aus i) folgt, dass diese Potenzreihe für mindestens alle $z \in U_0 := B(0, \frac{1}{2})$ konvergiert. Beweisen Sie, dass für alle $z \in U_0$ gilt:

$$z \cdot (z + 1) \cdot Q(z) = Q(z) - z.$$

iii) Sei $w_1 := \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})$ und $w_2 := \frac{1}{2} \cdot (1 - \sqrt{5})$. Beweisen Sie, dass für alle $z \in U_0$ gilt:

$$Q(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{-w_1}{z+w_1} + \frac{w_2}{z+w_2}).$$

Schließen Sie weiter – entweder durch Entwicklung in geometrische Reihen oder durch direkte Verifikation der anfangs gegebenen Vorschriften:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (w_1^n - w_2^n) \text{ für alle } n \geq 0.$$

iv) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = w_1$.

(8 Punkte)