Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Lineare Algebra

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 14 04.02.2016

Aufgabe 53. (nilpotente Matrizen)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine $(n\times n)$-Matrix A über einem Körper K heißt **nilpotent**, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^k = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ äquivalent sind:

   (i) A ist nilpotent.

   (ii) Der einzige Eigenwert von A ist 0.

   (iii) $A^n = 0$.

   Hinweis: Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt stets eine komplexe Nullstelle.

(b) Finden Sie eine reelle (3×3)-Matrix, die zwar 0 als einzigen Eigenwert hat, aber nicht nilpotent ist.

Aufgabe 54. (Diagonalisierbarkeit, Minimalpolynom und Jordannormalform)

Untersuchen Sie

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

als Matrix über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{F}_5$ auf Diagonalisierbarkeit und bestimmen Sie jeweils das zugehörige Minimalpolynom sowie die Jordannormalform.

Aufgabe 55. (Jordannormalform)

Zeigen Sie:

(a) Die Jordannormalform einer komplexen (3×3)-Matrix ist durch Angabe ihres charakteristischen Polynoms und Minimalpolynoms bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt.

(b) Die obige Aussage ist falsch für komplexe (4×4)-Matrizen.

(c) Die Angabe des Minimalpolynoms einer komplexen (3×3)-Matrix alleine reicht nicht aus, um ihre Jordannormalform zu bestimmen.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 56. (Anwendung im Austauschprozess)

Vor längerer Zeit gab es in einer Kleinstadt genau einen Supermarkt A. Später wurden zwei weitere Supermärkte B und C dort eröffnet, und seitdem wechselten einige Haushalten von einem zu einem anderen Supermarkt. Dabei wurde folgendes monatliche Wechselverhalten festgestellt: Von jedem Supermarkt bleibt die Hälfte der Kundschaft beim gleichen Supermarkt, während jedes der weiteren zwei Viertel jeweils zu einem anderen Supermarkt wechselt.

Im folgenden definieren wir a_n, b_n, c_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ als Anteil der Haushalten, die im n-ten Monat nach der Eröffnung der neuen Supermärkte in den Supermarkt A, B bzw. C gehen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(b) Finden Sie ein $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass $S^{-1}AS$ die Diagonalgestalt hat.

(c) Finden Sie eine geschlossene Formel für A^n sowie auch a_n, b_n, c_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}_0$.