§ 12 Unendliche Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern

Bemerkung 12.1:

Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine Multiplikation durch

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2):=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2,\ x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1).$$

Auf diese Weise wird $\mathbb{C}:=\mathbb{R}^2$ - mit der komponenten= weisen Addition - ein Körper, genannt der Körper der komplexen Zahlen.

Identifizieren wir jede reelle Zahl a mit $(a,0)\in\mathbb{C}$, so wird $\mathbb{R}$ ein Teil-Körper von $\mathbb{C}$, das heißt, es ist $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, und in $\mathbb{R}$ gelten die gleichen Rechenregeln wie in $\mathbb{C}$.

Ferner setzen wir $i:=(0,1)$. Dann ist $i\cdot a=(0,a)$ für alle $a\in\mathbb{R}$, und die obige Multiplikations-Vorschrift lautet:

$$(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i\cdot(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1).$$

Insbesondere folgt - mit $x_1=x_2=0,\ y_1=y_2=1$:

$$i^2=-1.$$

Für $(x,y)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ berechnen wir noch:

$$(x+i\cdot y)^{-1}=\frac{x-i\cdot y}{(x+i\cdot y)\cdot(x-i\cdot y)}=\frac{x-i\cdot y}{x^2-(i\cdot y)^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}-i\cdot\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Konventionen 12.2:

Es sei $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Die Zahl $\mathrm{Re}(z) := x$ heißt der Realteil von z.

ii) Die Zahl $\mathrm{Im}(z) := y$ heißt der Imaginärteil von z.

iii) Die Zahl $\overline{z} := x - i \cdot y$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.

iv) Die Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

heißt der Betrag von z.

Bemerkungen 12.3:

i) Wird $z = (x, y)$ als Vektor in $\mathbb{R}^2$ aufgefasst, so ist $|z|$ auch seine Euklidische Norm.

ii) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad ,$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \, .$$

Definition 12.4 (Übertragung von Definition 8.16):

Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert oder Limes dieser Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N(\varepsilon): \qquad |z_n - z| < \varepsilon .$$

Man beachte: Auf beiden Seiten der letzten Ungleichung stehen reelle Zahlen!

Konvergiert die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z - gemäß Definition 12.4, so schreiben wir, ähnlich wie bisher:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

Beispiel 12.5:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < 1$. Wir zeigen: $\lim_{n\to\infty} z_0^n = 0$.

Nach Aufgabe 44 iii) gilt: $\lim_{n\to\infty} |z_0|^n = 0$.

Daher folgt mit Bemerkung 12.3 ii):

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall n > N(\varepsilon): \; |z_0^n - 0| = |z_0|^n < \varepsilon$

- wie gewünscht.

Bemerkung 12.6:

Die Rechenregeln in Satz 8.20 können auf Folgen in $\mathbb{C}$ übertragen werden.

Definition 12.7:

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$s_n := z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k .$$

Dann heißt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe mit den Gliedern z_n und Partialsummen s_n.
Wir sagen, dass diese Reihe gegen ein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ist.

Wir schreiben dann auch:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n .$$

<u>Beispiel 12.8, Die Geometrische Reihe :</u>

Sei $w_0 \in \mathbb{C}$, sei $z_1 := 1 + w_0$ sowie $z_n := w_0^n$ für $n \geq 2$.
Ist $w_0 \neq 1$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k = (1 + w_0) + w_0^2 + \cdots + w_0^n = \frac{w_0^{n+1} - 1}{w_0 - 1} .$$

Dabei gilt die letzte Formel in jedem Körper, wenn nur $w_0 \neq 1$ ist.
Ist $|w_0| < 1$, so folgt aus Beispiel 12.5 - mit den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{-1}{w_0 - 1} = \frac{1}{1 - w_0} .$$

Im Falle $|w_0| \geq 1$ konvergiert die geometrische Reihe nicht.

Geometrische Reihen werden üblicherweise in der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_0^k$$

geschrieben - wenn $|w_0| < 1$ ist.

Speziell erhalten wir für $w_0 = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 .$$

Bemerkung 12.9:

Ist eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{C}$ konvergent, so folgt: $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$.

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend für Konvergenz.

Beispiel 12.10:

Die Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht:

Es gilt

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{3}{2}$$

sowie allgemeiner - für alle $n \geq 3$:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n} > 1+\frac{n}{2}.$$

Die Folge der Partialsummen ist also nicht beschränkt.

Definition 12.11:

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

konvergiert.

Bemerkungen 12.12:

i) Ist eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{C}$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.
Die Umkehrung gilt nicht; siehe Beispiel 12.13.

ii) Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit reellen Zahlen $a_k \geq 0$ ist - nach Satz 8.23 i) - genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beispiel 12.13:

Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

ist konvergent, aber - nach Beispiel 12.10 - nicht absolut konvergent.

Definition 12.14:

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ heißt die Menge

$$B(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r \}$$

die offene Kreisscheibe um z_0 mit dem Radius r.

Definition 12.15:

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert, und $(a_n)_{n \geq 0}$ sei eine Folge in $\mathbb{C}$.
Für variables $z \in \mathbb{C}$ heißt dann die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe in z.

Ist solch eine Potenzreihe in einer offenen Kreisscheibe $B(z_0, r)$ konvergent, so stellt sie dort eine <u>analytische</u> (oder auch holomorphe) Funktion $P: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ dar.

<u>Satz 12.16 (siehe auch Aufgabe 56 ii)):</u>

Gegeben sei eine Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n ,$$
und es gebe $\lambda, T > 0$ sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:
$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq \lambda \cdot T^n .$$
Dann konvergiert die Potenzreihe in $B(0, \frac{1}{T})$ absolut.

<u>Beweis:</u>

Sei $z \in B(0, \frac{1}{T})$ und $t := |z|$. Dann ist also $t < \frac{1}{T}$.
Weiter folgt für alle $n \geq n_0$:
$$|a_n \cdot z^n| = |a_n| \cdot t^n \leq \lambda \cdot (T \cdot t)^n .$$
Wegen $T \cdot t < 1$ konvergiert die geometrische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (T \cdot t)^n$$
- nach Beispiel 12.8. Nach Bemerkung 12.12 ii) konvergiert also erst recht die unendliche Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot z^n| .$$
□

Eine genauere Analyse obiger Beweisschritte liefert sogar den folgenden

Satz 12.17:

Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$.

Dann tritt -genau- einer der folgenden drei Fälle ein:

1.) Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

2.) Die Potenzreihe konvergiert nur für $z = 0$.

3.) Es gibt ein -eindeutig bestimmtes $r_0 \in \mathbb{R}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in B(0, r_0)$.

ii) Die Potenzreihe konvergiert für kein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r_0$.

Bemerkung 12.18:

Gilt in obigem Satz der 3. Fall, so heißt r_0 der Konvergenzradius der Potenzreihe.

- Im allgemeinen kann nichts über die Konvergenz der Potenzreihe für $|z| = r_0$ ausgesagt werden.

Bemerkung 12.19:

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Weiter sei eine analytische Funktion $P: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ durch eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

gegeben. Dann ist P auf $B(z_0, r)$ differenzierbar, und die gegebene Potenzreihe kann auf $B(z_0, r)$ gemäß der üblichen Differentiationsregeln gliedweise abgeleitet werden:

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot a_{m+1} \cdot (z-z_0)^m .$$

Insbesondere konvergiert diese Potenzreihe ebenfalls auf $B(z_0, r)$. Durch Induktion folgt, dass P auf $B(z_0, r)$ unendlich oft differenzierbar ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$P^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n .$$

Standard-Beispiel 12.20, Die Exponentialfunktion:

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n .$$

Zu jedem $T > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(T) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\frac{1}{n!} \leq T^n$.

Nach Satz 12.16 ist die durch exp gegebene Potenzreihe also überall auf $\mathbb{C}$ absolut konvergent.

Weiter liefert Bemerkung 12.19 für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot \frac{1}{(m+1)!} \cdot z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot z^m = \exp(z).$$

Das bedeutet:

Die Exponentialfunktion stimmt identisch mit ihrer Ableitung überein.

Weiter gilt:

$\exp(0) = 1$,

$e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \approx 2{,}71828$.

e heißt die Eulersche Zahl.

Bemerkung 12.21:

Zwei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n$, die beide auf einer offenen Kreisscheibe $B(0,r)$ -absolut- konvergieren, können dort gliedweise miteinander multipliziert werden, das heißt, für alle $z_1, z_2 \in B(0,r)$ gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z_1^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z_2^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \cdot z_1^k \cdot z_2^{n-k}\right).$$

Satz 12.22, Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2).$$

Beweis:

Bemerkung 12.21 und der Binomische Lehrsatz -Satz 8.6- liefern:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z_1^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z_2^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot z_1^k \cdot z_2^{n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z_1^k \cdot z_2^{n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (z_1 + z_2)^n$$

$$= \exp(z_1 + z_2).$$

$\square$

12.11

Bemerkung 12.23:

Aufgrund von Satz 12.22 hat exp tatsächlich die üblichen Eigenschaften einer Exponentialfunktion; insbesondere folgt durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(n) = \exp(n \cdot 1) = \exp(1)^n = \underbrace{e \cdots e}_{n \text{ Faktoren}} = e^n .$$

Satz 12.24:

i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

Insbesondere hat die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ keine Nullstelle.

ii) Die Exponentialfunktion nimmt auf $\mathbb{R}$ nur positive Werte an und ist dort streng monoton steigend.

Beweis:

i) Aus der Funktionalgleichung folgt

$$\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$$

wie gewünscht.

ii) Nach Definition ist klar:

$$e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq 0.$$

Nach i) gilt sogar $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die letzte Behauptung folgt nun wegen $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

12.12

<u>Satz 12.25:</u>

Zu jedem $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$.

<u>Beweis:</u>

Die Eindeutigkeit ist klar nach Satz 12.24 ii).

Sei weiter $T > 1$ mit $\frac{1}{T} < y < T$. Nach Definition ist klar: $\exp(T) > T + 1 > T$.

Damit folgt weiter: $\exp(-T) < \frac{1}{T}$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in (-T, T)$ mit $\exp(x) = y$.

$\square$

Aufgrund von Satz 12.25 ist folgende Definition sinnvoll:

<u>Definition 12.26:</u>

Die natürliche <u>Logarithmus-Funktion</u> $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\ln(e^x) := x.$$

ln ist also die Umkehrfunktion zu der Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$.

<u>Bemerkung 12.27:</u>

Es seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$, und es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $e^{x_1} = y_1$ und $e^{x_2} = y_2$. Dann folgt mit Satz 12.22:

$$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(e^{x_1} \cdot e^{x_2}) = \ln(e^{x_1 + x_2}) = x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2).$$

Satz 12.28:

Die Funktion $\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\ln'(t) = \frac{1}{t}.$$

Beweis:

Aus Satz 10.17 folgt mit $g = \ln$ und $f = \exp = \exp'$:

$$\ln'(t) = \frac{1}{\exp'(\ln(t))} = \frac{1}{\exp(\ln(t))} = \frac{1}{t}.$$

$\square$

Definition 12.29:

Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$a^b := \exp(\ln(a) \cdot b) = e^{\ln(a) \cdot b}.$$

Man beachte: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exp(\ln(a) \cdot n) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n.$$

Satz 12.30:

i) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die allgemeinere Exponential=funktion $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_a(x) := a^x$$

differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_a'(x) = \ln(a) \cdot a^x.$$

ii) Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Potenzfunktion $g_b: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g_b(x) := x^b$$

ebenfalls differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$g_b'(x) = b \cdot x^{b-1}.$$

Beweis:

i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $f_a(x) = \exp(\ln(a) \cdot x)$.

Also liefert die Kettenregel:

$$f_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp(\ln(a) \cdot x) = \ln(a) \cdot a^x.$$

ii) Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist $g_b(x) = \exp(\ln(x) \cdot b)$.

Damit folgt wiederum aus der Kettenregel - und Satz 12.28:

$$
\begin{aligned}
& g_b'(x) \\
&= \frac{b}{x} \cdot \exp(\ln(x) \cdot b) \\
&= b \cdot \exp(-\ln(x)) \cdot \exp(\ln(x) \cdot b) \\
&= b \cdot \exp(\ln(x) \cdot b - \ln(x)) \quad \text{(Funktionalgleichung von exp)} \\
&= b \cdot \exp(\ln(x) \cdot (b-1)) \\
&= b \cdot x^{b-1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 12.31, Die Taylorsche Formel als unendliche Reihe:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar. Weiter seien $z_0, z \in I$ mit folgender Eigenschaft:

Es gebe ein $S \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [z_0, z]$ bzw. für alle $t \in [z, z_0]$ gilt:

(T) $\qquad |f^{(n)}(t)| \leq S.$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n \\
&= f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(z_0) \cdot (z - z_0)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Siehe hierzu auch Bemerkung 12.19.

Beispiel 12.32:

Die Funktionen cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen die obige Bedingung (T) mit $S = 1$.

Für alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\cos^{(k)}(0) = 0$.

Für alle $n \geq 0$ gilt: $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$.

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{R}$, wenn in der Taylorschen Formel $z_0 = 0$ gesetzt wird:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} \quad .$$

Für alle geraden $k \in \mathbb{N}$ gilt weiter: $\sin^{(k)}(0) = 0$.

Für alle $n \geq 0$ gilt: $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

Damit erhalten wir weiter für alle $z \in \mathbb{R}$:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} \quad .$$

Bemerkung 12.33:

Die obigen Potenzreihen sind sogar für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Daher werden sin und cos so auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt, dass obige Potenzreihen-Darstellungen für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten.

Definition 12.34:

Es seien zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Weiter nehmen wir an, dass für alle $x \in [0, 2\pi]$ die folgende Reihe konvergiert und damit eine Funktion $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ darstellt:

$$f(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)).$$

Dann heißt diese Reihe Fourierreihe von f.

Bemerkung 12.35:

Fourierreihen spielen insbesondere in der Signal=verarbeitung eine Rolle, in der Funktionen auftreten, die durch Überlagerungen von Schwingungen gegeben sind.

Satz 12.36:

Die Funktion $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, und es sei $f(0) = f(2\pi)$. Dann läßt sich f in eine Fourierreihe wie in Definition 12.34 entwickeln.

Dabei gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\,dx \quad \text{für } n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\,dx \quad \text{für } n \geq 1.$$

<u>Beispiel 12.37:</u>

Wir definieren $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := (x-\pi)^2 .$$

f ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt:

$$f(0) = f(2\pi) = \pi^2 .$$

Also kann Satz 12.36 angewendet werden.

Wir erhalten:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-\pi)^3 \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2\pi} \cdot (\pi^3 + \pi^3) = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 .$$

Für $n \geq 1$ folgt weiter durch zweifache Partielle Integration:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cdot \cos(n \cdot x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot (x-\pi)^2 \cdot \sin(n \cdot x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \int_0^{2\pi} 2 \cdot (x-\pi) \cdot \sin(n \cdot x) \, dx$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \left(-\frac{1}{n} \cdot (x-\pi) \cdot \cos(n \cdot x) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(n \cdot x) \, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot n^2} \cdot \left(\pi \cdot 1 - (-\pi) \cdot 1 - \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot x) \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$= \frac{4}{n^2} .$$

Für $n \geq 1$ folgt weiter:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cdot \sin(n \cdot x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin(n \cdot (x+\pi)) \, dx = \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin(n \cdot x) \, dx .$$

Im letzten Integral ist der Integrand eine ungerade Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.
Also liefert Aufgabe 54 ii): $b_n = 0$ für alle $n \geq 1$.

Zusammenfassend folgt für alle $x \in [0, 2\pi]$:

$$(x-\pi)^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot x).$$

<u>Korollar 12.38:</u>

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Beweis:</u>

Die obige Formel liefert für $x = 0$:

$$\pi^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\pi^2 - \frac{1}{3} \cdot \pi^2\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

<u>Bemerkung 12.39:</u>

Für stetige Funktionen $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ setzen wir:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Dann ist $\langle \, , \, \rangle$ kommutativ und bilinear.
Weiter setzen wir:

$$f_0(x) := \frac{1}{2\pi} \text{ für } x \in [0, 2\pi],$$

$$f_n(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \cos(n \cdot x) \text{ für } x \in [0, 2\pi], \, n \in \mathbb{N},$$

$$f_{-n}(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \sin(n \cdot x) \text{ für } x \in [0, 2\pi], \, n \in \mathbb{N}.$$

Dann liefert Satz 12.36 für jede stetig differenzier=
bare Funktion $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, f_n \rangle \cdot f_n .$$

Weiter gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m . \end{cases}$$

Wir sagen auch:
Die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{Z}$, bilden ein <u>vollständiges Orthonormalsystem</u>.
Vergleiche hierzu auch Satz 7.10 (Gram-Schmidt) und Aufgabe 38.

§ 13 A Differentialrechnung in Vektorräumen

Im folgenden seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Definition 13 A.1:

Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heißt offen, falls zu jedem $x_0 \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow x \in U.$$

Beispiele:

$\mathbb{R}^n$ und $(0,1)^n$ sind offen.

Bemerkung 13 A.2:

Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $f: A \to \mathbb{R}^m$ sei irgendeine Abbildung. Dann gibt es eindeutig bestimmte Abbildungen $f_1, \dots, f_m: A \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Wir schreiben: $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Definition 13 A.3:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ fixiert, und sei $g: U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Weiter sei ein Index j mit $1 \leq j \leq n$ fixiert. Dann heißt g in a partiell differenzierbar nach der j-ten Koordinate x_j, wenn - für passendes $\delta > 0$ - die Abbildung $h: (a_j - \delta, a_j + \delta) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$h(x) := g(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

in a_j differenzierbar ist.

Die Ableitung
$$D_j\, g(a) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(a) := h'(a_j)$$
heißt dann die <u>j-te partielle Ableitung von g im Punkt a.</u>

<u>Definition 13A.4:</u>
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt <u>stetig differenzierbar</u>, wenn alle partiellen Ableitungen $D_j f_i$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ auf U existieren und dort stetig sind.
Für $a \in U$ heißt dann die Matrix

$$J(a) = J_f(a) := \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

die <u>Jacobi-Matrix von f im Punkt a.</u>

<u>Bemerkung 13A.5:</u>
Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so heißt die einreihige Jacobi-Matrix $(D_1 f(a), \dots, D_n f(a))$, die also ein Vektor ist, auch <u>Gradient</u> von f im Punkt a.

<u>Bemerkung 13A.6:</u>
Sei speziell $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die <u>zweidimensionale Fläche</u>
$$A := \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

Für $a = (a_1, a_2) \in U$ heißt dann die Ebene mit der Gleichung

$$D_1 f(a) \cdot (x - a_1) + D_2 f(a) \cdot (y - a_2) = z - f(a_1, a_2)$$

<u>die Tangentialebene im Punkt a an die Fläche A</u>.

Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt: Der Gradient $(D_1 f(a), D_2 f(a))$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs der Fläche im Punkt a an.

<u>Beispiel 13.A.7:</u>
Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x^2 + y^2$.
f ist stetig differenzierbar, und für alle $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ folgt:

$$J_f(a) = (2a_1, 2a_2).$$

A wie oben ist nun eine Fläche, auf der - nach dem Satz des Pythagoras - alle Höhenlinien (das sind die Schnitte mit horizontalen Ebenen) Kreise sind.
Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $a = (a_1, a_2)$ lautet nun:

$$2a_1 \cdot (x - a_1) + 2a_2 \cdot (y - a_2) = z - a_1^2 - a_2^2 .$$

Vereinfachung liefert:

$$2a_1 \cdot x + 2a_2 \cdot y = z + a_1^2 + a_2^2 .$$

A heißt übrigens ein <u>Paraboloid</u>. Die Schnitte mit der xz-Ebene sowie mit der yz-Ebene sind Parabeln.

Allgemein gilt

<u>Satz 13 A.8:</u>
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann gilt - wenn alle Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ als Spaltenvektoren aufgefasst werden - für alle $a \in U$:

$$\lim_{x \to a,\, x \neq a} \frac{\|f(x) - f(a) - J(a) \cdot (x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 .$$

<u>Bemerkung 13 A.9:</u>
Unter den Konventionen wie in Satz 13 A.8 heißt die Jacobi-Matrix $J(a)$ - oder die induzierte lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - auch die <u>totale Ableitung von f in a</u>.