Lösungen der Sonderaufgaben zu der Vorlesung „Analysis und Lineare Algebra für Informatiker"

A i) a) ist richtig:

$\{0\}$ ist linear abhängig.

ii) b) ist richtig:

Beispiel: $x+y=2 \wedge 2x+2y=4$.

iii) b) ist richtig:

Das Charakteristische Polynom, das den Grad n hat, hat höchstens n reelle Nullstellen.

iv) a) ist richtig:

Das Charakteristische Polynom, das den Grad 3 hat, hat mindestens eine reelle Nullstelle.

B) σ_0 ist vertauschbar mit $id = id_{J_3}$ und σ_0^2, gegeben durch

$\sigma_0^2(1) = 3,\ \sigma_0^2(2) = 1,\ \sigma_0^2(3) = 2.$

Wir definieren nun $\tau_0 \in S_3$ durch

$\tau_0(1) := 2,\ \tau_0(2) := 1,\ \tau_0(3) := 3.$

σ_0 und τ_0 sind nicht vertauschbar; denn es gilt:

$(\sigma_0 \circ \tau_0)(1) = \sigma_0(2) = 3 \quad , \quad (\tau_0 \circ \sigma_0)(1) = \tau_0(2) = 1 \neq 3.$

σ_0 und $\sigma_0 \circ \tau_0$ sind auch nicht vertauschbar; denn es gilt:

$(\sigma_0 \circ (\sigma_0 \circ \tau_0))(1) = \sigma_0^2(2) = 1,$

$((\sigma_0 \circ \tau_0) \circ \sigma_0)(1) = (\sigma_0 \circ \tau_0)(2) = \sigma_0(1) = 2 \neq 1.$

Auch σ_0 und $\sigma_0^2 \circ \tau_0$ sind nicht vertauschbar; denn es gilt:

$$(\sigma_0 \circ (\sigma_0^2 \circ \tau_0))(1) = (id \circ \tau_0)(1) = 2,$$
$$((\sigma_0^2 \circ \tau_0) \circ \sigma_0)(1) = \sigma_0(2) = 3 \neq 2.$$

Die 6 Permutationen $id, \sigma_0, \sigma_0^2, \tau_0, \sigma_0 \circ \tau_0, \sigma_0^2 \circ \tau_0$ sind verschieden, also ist

$$S_3 = \{id, \sigma_0, \sigma_0^2, \tau_0, \sigma_0 \circ \tau_0, \sigma_0^2 \circ \tau_0\}.$$

Wie die obigen Rechnungen zeigen, ist σ_0 genau mit den Permutationen id, σ_0, σ_0^2 vertauschbar.

c) Es ist

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a-1 \end{pmatrix} = (a-1) - 2 \cdot 3 = a - 7.$$

Die 3 Vektoren u, v, w_a sind also genau dann linear abhängig, wenn $a = 7$ ist.

<u>Probe:</u> $(1, 3, 7) = 2 \cdot (1, 2, 4) - (1, 1, 1).$

D i) Aus der Cramerschen Regel folgt:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{60-27}{25-21} = \frac{33}{4} = 8{,}25 \quad ;$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{45-84}{4} = -\frac{39}{4} = -9{,}75 \quad .$$

<u>Probe:</u>

$$5 \cdot 8{,}25 + 3 \cdot (-9{,}75) = 41{,}25 - 29{,}25 = 12 \quad ;$$
$$7 \cdot 8{,}25 + 5 \cdot (-9{,}75) = 57{,}75 - 48{,}75 = 9 \quad .$$

ii) Hier wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren an und erhalten folgende Tabellen:

$$\begin{array}{c|l} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & -2 & 4 & 25 \\ 2 & 5 & -1 & 23 \\ 6 & -2 & 1 & 16 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ II - 2 \cdot I \\ III - 6 \cdot I \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & -2 & 4 & 25 \\ 0 & 9 & -9 & -27 \\ 0 & 10 & -23 & -134 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ :9 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & -2 & 4 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & -23 & -134 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 10 \cdot II \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & -2 & 4 & 25 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & -104 \end{array}\right)$$

Somit erhalten wir - als eindeutig bestimmte - Lösung:

$$x_3 = \frac{-104}{-13} = 8,$$

$$x_2 = -3 + x_3 = 5,$$

$$x_1 = 25 + 2x_2 - 4x_3 = 25 + 10 - 32 = 3.$$

Probe:

$3-2\cdot 5+4\cdot 8=25$; $2\cdot 3+5\cdot 5-8=23$; $6\cdot 3-2\cdot 5+8=16$.

E) Das Charakteristische Polynom $P_A(X)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &P_A(X) \\ &= \det\begin{pmatrix} X-4 & -2 \\ -2 & X-7 \end{pmatrix} \\ &= (X-4)\cdot(X-7)-4 \\ &= X^2-11X+24 \\ &= (X-3)\cdot(X-8). \end{aligned}$$

$P_A(X)$ hat also die Nullstellen $\lambda_1=3$ und $\lambda_2=8$.

Zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert 3 ist folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow\ 4x_1+2x_2=3x_1 \ \wedge\ 2x_1+7x_2=3x_2$

$\Leftrightarrow\ x_1=-2x_2$

Der Unterraum der Eigenvektoren zum Eigenwert 3 ist also

$$U_3 = \left\{\begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R}\right\}.$$

Zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert 8 ist folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 8\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow\ 4x_1+2x_2=8x_1 \ \wedge\ 2x_1+7x_2=8x_2$

$\Leftrightarrow\ x_2=2x_1$

Der Unterraum der Eigenvektoren zum Eigenwert 8 ist also

$$U_8 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

F) Wir erhalten:

$$\det(A)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -2 & -\sin(\alpha)-\cos(\alpha) & \cos(\alpha)-\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & -2\cdot\cos(\alpha) & -2\cdot\sin(\alpha) \\ 0 & -2 & \sin(\alpha)-\cos(\alpha) & -\cos(\alpha)-\sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sin(\alpha)-\cos(\alpha) & \cos(\alpha)-\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 1 & \sin(\alpha)-\cos(\alpha) & -\cos(\alpha)-\sin(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sin(\alpha)-\cos(\alpha) & \cos(\alpha)-\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 2\cdot\sin(\alpha) & -2\cdot\cos(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot (-\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

$$= -8.$$

G) Wir schreiben

$$u = (a_1, a_2, a_3)^T,\ v = (b_1, b_2, b_3)^T,\ w = (c_1, c_2, c_3)^T.$$

i) Wir erhalten:

$$|\langle u, v\rangle|^2 + \|u \times v\|^2$$

$$= (a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3)^2$$

$$+ (a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2)^2 + (a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3)^2 + (a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1)^2$$

$$= a_1^2\cdot b_1^2 + a_2^2\cdot b_2^2 + a_3^2\cdot b_3^2$$

$$+ a_2^2\cdot b_3^2 + a_3^2\cdot b_2^2 + a_3^2\cdot b_1^2 + a_1^2\cdot b_3^2 + a_1^2\cdot b_2^2 + a_2^2\cdot b_1^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2.$$

ii) Es ist

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

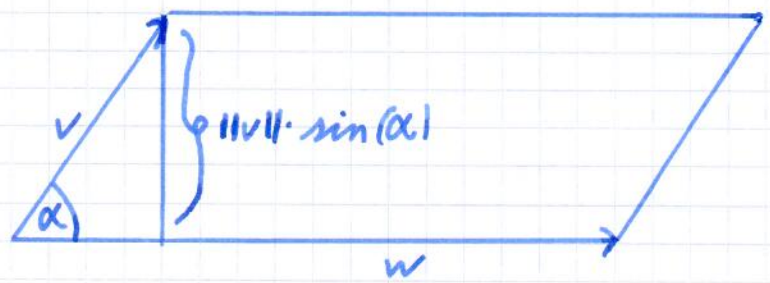
$$= a_1\cdot(b_2\cdot c_3 - b_3\cdot c_2) + a_2\cdot(b_3\cdot c_1 - b_1\cdot c_3) + a_3\cdot(b_1\cdot c_2 - b_2\cdot c_1)$$
$$= \langle (a_1, a_2, a_3)^T, (b_2\cdot c_3 - b_3\cdot c_2, b_3\cdot c_1 - b_1\cdot c_3, b_1\cdot c_2 - b_2\cdot c_1)^T \rangle$$
$$= \langle u, v\times w\rangle.$$

iii) Aus i) und Satz 7.4 folgt mit $\alpha := \measuredangle(v,w)$:

$$\|v\times w\|^2$$
$$= \|v\|^2\cdot\|w\|^2 - |\langle v,w\rangle|^2$$
$$= \|v\|^2\cdot\|w\|^2 - \|v\|^2\cdot\|w\|^2\cdot\cos^2(\alpha)$$
$$= \|v\|^2\cdot\|w\|^2\cdot\sin^2(\alpha).$$

Somit folgt die Behauptung - mit der Konvention $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$.
Weiter gibt die rechte Seite der Gleichung den Flächeninhalt des beschriebenen Parallelogramms an.

Skizze



iv) folgt direkt aus ii) - mit $u=v$ bzw. $u=w$.

H) Nach G iii) und iv) können wir $v_3 := v_1 \times v_2$ setzen.
Wir erhalten dann:

$$v_3 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Probe:
Es gilt tatsächlich:

$$\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = 0, \langle v_3, v_3\rangle = 1.$$

Folglich ist $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis.