1. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Diskrete und Numerische Mathematik für Informatiker"

Frankfurt, den 12.4.2016

Abgabetermin: 19.4.2016, 12:00 – vor der Vorlesung

1.) Bestimmen Sie – mit Begründung – die Kardinalitäten der folgenden Mengen:

i) $M_1 := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 100,\, n \text{ ist ein ungerades Vielfaches der Zahl } 3\}$.

ii) $M_2 := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 50,\, n \text{ hat die Gestalt } m^2 - m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$.

iii) $M_3 := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 100,\, n \text{ ist eine Primzahl und hat die Gestalt } m^2 + 1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$.

iv) $M_4 := \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 50,\, n \text{ ist eine Primzahl und hat die Gestalt } a^2 + b^2 \text{ für gewisse } a, b \in \mathbb{N}\}$.

(8 Punkte)

2i) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2m - 1$. Beweisen Sie: Es gibt genau $\binom{n-m+1}{m}$ Teilmengen der Menge $J_n := \{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq k \leq n\}$ mit genau m Elementen, in denen keine zwei benachbarte Zahlen enthalten sind.

ii) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten beim Zahlen-Lotto "6 aus 49", bei denen mindestens zwei Zahlen benachbart sind.

Hinweise:
Zu i): Konstruieren Sie eine Bijektion in die Menge der m-elementigen Teilmengen der Menge $J_{n-m+1} = \{k \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq k \leq n - m + 1\}$.

Zu ii): Verwenden Sie i).

(6 Punkte)

3.) Im "Spiel 77" wird der Reihe nach und unabhängig voneinander 7 mal eine der 10 Ziffern $0, 1, ..., 9$ gezogen. Bestimmen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, bei denen es in der gezogenen 7–stelligen Endzahl zwei Ziffern an benachbarten Stellen gibt, die gleich sind.

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst die Anzahl der Möglichkeiten, für die die beschriebene Konstellation nicht zutrifft.

(3 Punkte)

4.) Im Parlament eines Landes gibt es 201 Sitze und 3 Parteien. Wieviele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, so dass keine Partei die absolute Mehrheit hat?

Hinweis: Verwenden Sie die Summenformel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(3 Punkte)