Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 1 13. April 2016

Aufgabe 1. (Einheitswurzeln, 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$\mu_n(\mathbb{C}) := \{e^{2\pi i a/n}\ ;\ a \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mu_n(\mathbb{C})$ mit der von $\mathbb{C}$ geerbten Multiplikation eine Gruppe ist.

(b) Beschreiben Sie einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. (Satz von Wilson, 4 Punkte)

Seien G eine abelsche Gruppe und $U = \{g \in G\ ;\ \mathrm{ord}(g) \leq 2\}$.

(a) Zeigen Sie, daß U eine Untergruppe von G ist.

(b) Sei nun G zusätzlich von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, daß

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in U} g.$$

(c) Sei $p > 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, daß

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Tipp: Verwenden Sie (b) für eine geeignete Gruppe.

Aufgabe 3. (Ordnungen, 4 Punkte)

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomrphismus. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a \in G$ gilt $\mathrm{ord}(f(a)) \leq \mathrm{ord}(a)$.

(b) Wenn $\mathrm{ord}(a)$ endlich ist, dann ist $\mathrm{ord}(f(a))$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(a)$.

(c) Ist f ein Isomorphismus, dann gilt $\mathrm{ord}(f(a)) = \mathrm{ord}(a)$. Reicht es, wenn f injektiv (bzw. surjektiv) ist?

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. (Quaternionen und die Quaternionengruppe, 4 Punkte)

Sei $\mathbb{H} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

mit $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist.

(b) Wir betrachten die Teilmenge $Q_8 \subseteq \mathbb{H}^\times$ derjenigen Quaternionen

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

mit $\det(A) = 1$ und Realteil und Imaginärteil von z und w sind aus $\mathbb{Z}$.
Zeigen Sie, daß Q_8 eine Untergruppe der Ordnung 8 ist.

(c) Wir bezeichnen die folgenden Elemente von Q_8 mit

$$i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie alle Elemente von Q_8 als Produkte, deren Faktoren nur die Elemente i und j sind, und bestimmen Sie ihre Ordnungen.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **20. April 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA`
