Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 1 13.04.2016

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Seien G und H topologische Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für alle offene Umgebung V von $1 \in H$ eine offene Umgebung U von $1 \in G$ gibt, so dass $f(U) \subseteq V$.

(b) Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $G_i := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ versehen mit der diskreten Topologie. Das Produkt

$$G := \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i,$$

wird dann mit der Produkttopologie ausgestattet. Geben Sie echte Untergruppen $U_1, U_2 \lneq G$ an, so dass U_1 offen und U_2 abgeschlossen aber nicht offen in G ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei G eine kompakte topologische Gruppe. Ferner sei $G = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ eine disjunkte Zerlegung in offene (und somit auch abgeschlossene!) Teilmengen $X_i \subseteq G$.

Zeigen Sie: Es gibt eine Verfeinerung durch Nebenklassen nach einem offenen Normalteiler $N \trianglelefteq G$. Mit anderen Worten: Es gibt einen offenen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ sowie Teilmengen $\bar{X}_i \subseteq G/N$ derart, dass unter der kanonischen Projektion $p : G \to G/N$ gilt: $X_i = p^{-1}(\bar{X}_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es sei I eine partiell geordnete Menge und $(\{G_i\}, \{f_{ij}\})$ ein projektives System topologischer Gruppen mit stetigen Homomorphismen $f_{ij} : G_j \to G_i$ für $i \leq j$.

Zeigen Sie, dass der projektive Limes $\varprojlim_{i \in I} G_i$ eine abgeschlossene Untergruppe in $\prod_{i \in I} G_i$ ist.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 4. ($\hat{\mathbb{Z}}$, 4 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes projektives System endlicher Gruppen: Als Indexmenge wählen wir $\mathbb{N}$ mit Teilbarkeit als partieller Ordnung. Als projektives System betrachten wir die Familie $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ mit den kanonischen, surjektiven Homomorphismen

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\ a + n\mathbb{Z} \longmapsto a + m\mathbb{Z},$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m|n$ als Übergangsabbildungen.

(a) Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein projektives System endlicher Gruppen handelt.

Die Gruppe $\hat{\mathbb{Z}}$ der **proendlichen Zahlen** ist definiert durch

$$\hat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

und wird wie üblich mit der Krull-Topologie versehen. Zeigen Sie:

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

(c) Die offenen Untergruppen von $\hat{\mathbb{Z}}$ sind genau die Untergruppen der Gestalt $n\hat{\mathbb{Z}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **20.04.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Gruppen`
