Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 20.04.2016)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Schreiben Sie das Anfangswertproblem (AWP) 3. Ordnung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y(x), \quad y''' = \sqrt{x^2+1}y'' - 12y'y + x - 9, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 17,\ y''(0) = 0$$

um in ein (äquivalentes) System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Aufgabe 2.2 (schriftlich Aufgabe)[3 Punkte]
Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.5 (Picard-Lindelöf). Seien $y, z\colon [x_0, x_{\text{end}}] \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und zwei Lösungen der gleichen DGL, aber mit verschiedenen Anfangswerten, d.h.

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0, \qquad z'(x) = f(x, z(x)),\ z(x_0) = z_0,$$

wobei $y_0 \neq z_0$. Wir betrachten das Quadrat der Differenz der Lösungen $s(x) := \|y(x) - z(x)\|^2$.

(i) Zeigen Sie, dass ein maximales $\delta > 0$ existiert mit $x_0 + \delta \leq x_{\text{end}}$ und $s(x) \neq 0$, $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$.

(ii) Zeigen Sie: gilt für dieses δ gerade $x_0 + \delta < x_{\text{end}}$, so ist $s(x_0 + \delta) = 0$.

Aufgabe 2.3 (schriftliche Aufgabe)[2+5 Punkte]
Für ein AWP

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

kann man zur Näherung an die analytische Lösung $y(t)$ zum Zeitpunkt t die sogenannte **Picard-Lindelöf-Iteration** verwenden:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y^{(k)}(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es ist naheliegend, $y^{(0)} \equiv y_0$ zu wählen.

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an die Lösung der Riccati-Differentialgleichung

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \dot{y}(t) = y(t)^2 + t^2, \quad y(0) = 0,$$

indem Sie drei Iterationsschritte durchführen.

(b) Lösen Sie das AWP

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t)y_3(t) \\ -y_2(t)y_3(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Picard-Lindelöf-Iteration. Raten Sie dazu eine Lösung, nachdem Sie ein paar Schritte ausgeführt haben und zeigen Sie, dass diese Funktion das AWP löst.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgbe)[4 Punkte]
Wir wollen das Anfangswertproblem des Räuber-Beute-Modells numerisch lösen. Sei $y_1(t)$ die Beute- und $y_2(t)$ die Räuberpopulation, $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ und $y(0) = (y_1(0), y_2(0))$ die Werte der Populationen zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Funktion $y(t)$ erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 y_1 - f_1 y_1 y_2 \\ -r_2 y_2 + f_2 y_1 y_2 \end{pmatrix} =: F(t, y(t)).$$

Indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx \dot{y}(t) = F(t, y(t)), \quad h > 0 \text{ klein},$$

sieht man, wie man aus den Werten $y(t)$ und $F(t, y(t))$ eine Approximation an $y(t+h)$ berechnen kann. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\texttt{function}\ [y_1, y_2] = \textbf{RaeuberBeute}(T, h, y0, r, f)$$

die so für die nichtnegativen Parameter $r = [r_1, r_2]$, $f = [f_1, f_2]$ und $y0 = [y_1(0), y_2(0)]$ die Entwicklung der Populationen $y(t)$ bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$ approximiert. Unterteilen Sie dazu das Zeitintervall $[0, T]$ äquidistant mit Schrittweite h.

Plotten Sie für die Werte $(T, h, y0, r, f) = (10, 0.0005, [10, 1], [2, 4], [2, 1])$:

(a) Ihre Approximation an $y_1(t), y_2(t)$ jeweils als Funktion von t in ein gemeinsames Schaubild.

(b) Ihre Approximation an y_2 als Funktion von (Ihrer Approximation an) y_1.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 26.04.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 26.04.2016 um 12:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL2_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL2_2016_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in den Übungen zwischen dem 26-28.04.2016 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**