Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 2 20.04.2016

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Ferner sei Γ ein diskreter topologlischer Raum. Zeigen Sie:

Jede stetige Abbildung $f : H \to \Gamma$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : U \to \Gamma$ für eine offene Untergruppe $U \leq G$ fortsetzen.

Aufgabe 6. (Beispiele projektiver Limiten von Ringen, 4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Der Ring der **p-adischen Zahlen** $\mathbb{Z}_p$ kann definiert werden als Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bzgl. des p-adischen Absolutbetrags $|\cdot|_p$, d.h.

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (x_n)_n \text{ ist Cauchyfolge bzgl. } |\cdot|_p \right\} \Big/ \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \xrightarrow[n\to\infty]{|\cdot|_p} 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass mit dieser Definition folgender Isomorphismus von Ringen besteht:

$$\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

(b) Sei K ein Körper. Eine **formale Potenzreihe** ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots, \quad \text{wobei } a_0, a_1, a_2, \ldots \in K.$$

Die Summe bzw. das Produkt zweier Potenzreihen wird komponentenweise bzw. anhand des Cauchy-Produkts erklärt. Dadurch erhalten wir den Ring der formalen Potenzreihen, der mit $K[[X]]$ bezeichnet wird. Zeigen Sie:

$$K[[X]] \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K[X]/(X^n).$$

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 7. (Die Einheitengruppe des projektiven Limes von Ringen, 4 Punkte)

(a) Sei I eine partiell geordnete, gerichtete Menge. Ferner seien $(\{R_i\}, \{f_{ij}\})$ ein projektives System von Ringen. Zeigen Sie:

   (i) Die Einschränkungen der Übergangshomomorphismen f_{ij} auf die Einheitengruppen liefern ein projektives System von Gruppen $(\{R_i^\times\}, \{f_{ij}|_{R_i^\times}\})$.

   (ii) Bezeichnet R den projektiven Limes von $(\{R_i\}, \{f_{ij}\})$, so besteht der kanonische Isomorphismus von Gruppen
$$R^\times \cong \varprojlim_{i\in I} R_i^\times.$$

(b) Nutzen Sie den Teil (a), um die Struktur der Einheitengruppe $\mathbb{Z}_p^\times$ als Produkt einer Torsionsgruppe mit $(\mathbb{Z}_p, +)$.

Hinweis – Verwenden Sie den Teichmüller-Repräsentanten, der z.B. aus der Vorlesung Elementare Zahlentheorie bekannt ist.

Aufgabe 8. ($\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$, 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine natürliche Primzahl. Wir versehen die Gruppe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p) \mid \det(\mathbb{Z}_p) = 1\}$$

mit der durch die Einbettung $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{n^2}$ induzierte Teilraumtopologie.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ eine proendliche Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie eine p-Sylowgruppe in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **27.04.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Gruppen`
