Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Präsenzaufgabenblatt 2 20. April 2016

Aufgabe P5. (Ordnungen von Potenzen)

Sei $g \in G$ ein Element der Ordnung $n < \infty$.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung von g^a für $a \in \mathbb{Z}$, insbesondere von g^{-1}.

(b) Sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe und $g \in U$. Bestimmen Sie die Ordnung von g als Element von U.

Aufgabe P6. (Links- versus Rechtsoperationen)

Sei G eine Gruppe und X eine G-Menge. Wir definieren durch

$$(x, g) \mapsto g^{-1}.x$$

eine Abbildung $X \times G \to X$. Zeigen Sie, daß dies eine Rechtsoperation von G auf X definiert, und zeigen Sie so, daß man jede Linksoperation in eine Rechtsoperation übersetzen kann (und analog umgekehrt).

Aufgabe P7. (Elemente der Ordnung 2)

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß es ein $g \in G$ verschieden von 1 mit $g^2 = 1$ gibt.

Tipp: Verwenden Sie die Bahnenformel für die Operation der Gruppe $\{\pm 1\}$ auf G definiert für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ und $g \in G$ durch

$$\varepsilon.g = g^{\varepsilon}.$$

Formulieren Sie, was es für ein Element bedeutet, wenn seine Bahn die Länge 1 hat.

Aufgabe P8. (Affin-lineare Gruppe)

Sei K ein Körper. Wir betrachten die Menge

$$\mathrm{Aff}_n(K) = \mathrm{GL}_n(K) \times K^n$$

und die Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{Aff}_n(K) \times K^n &\to K^n \\ ((A, b), x) &\mapsto (A, b).x = Ax + b. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß man $\mathrm{Aff}_n(K)$ auf eindeutige Weise mit einer Verknüpfung zu einer Gruppe machen kann, so daß die angegebene Formel eine Gruppenoperation auf K^n definiert. Was ist das neutrale Element? Wie sieht das inverse Element zu (A, b) aus?

(b) Zeigen Sie: Die Teilmenge $U = \{(A, 0)\ ;\ A \in \mathrm{GL}_n(K)\}$ ist eine Untergruppe isomorph zu $\mathrm{GL}_n(K)$. Bestimmen Sie die Linksnebenklassen von U in $\mathrm{Aff}_n(K)$. Stimmen diese mit den Rechtsnebenklassen überein?

(c) Zeigen Sie: Die Teilmenge $N = \{(\mathbf{1}_n, b)\ ;\ b \in K^n\}$ ist eine Untergruppe isomorph zu K^n. Bestimmen Sie die Rechts- und die Linksnebenklassen von N in $\mathrm{Aff}_n(K)$.

(d) Beschreiben Sie die Bahnen der Operation und den Stabilisator von $0 \in K^n$.