Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 3 27. April 2016

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Seien N und M Normalteiler einer Gruppe G mit $N \cap M = \{1\}$. Zeigen Sie, daß die Elemente von N mit den Elementen von M kommutieren: für alle $x \in N$ und $y \in M$ gilt $xy = yx$.

Aufgabe 10. ('Normalteiler sein' ist nicht transitiv, 4 Punkte)

Sei $G = D_4$. Finden Sie Untergruppen $U \subseteq N \subseteq G$, so daß gleichzeitig gilt:

(i) N ist Normalteiler in G,

(ii) U ist Normalteiler in N,

(iii) U ist kein Normalteiler in G.

Tipp: Wenn sie den Rechenaufwand klein halten wollen, dann versuchen Sie N zu beschreiben, als die Untergruppe der Elemente von D_4, die eine geeignete geometrische Bedingung beim Quadrat einhalten. Dann ist N ein Stabilisator, ...

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Elemente $\sigma_i \in S_{12}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 7 & 9 & 11 & 12 & 10 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 5 & 4 & 9 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) die Zykeldarstellung,

(b) das Signum $\mathrm{sign}(\sigma_i)$, die Ordnung $\mathrm{ord}(\sigma_i)$,

(c) die Ordnung des Zentralisators und die Mächtigkeit der Konjugationsklasse in S_{12}.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie: wenn $G = \bigcup_{g \in G} gUg^{-1}$, dann ist $U = G$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **04. Mai 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA`