Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 27.04.2016)

Aufgabe 3.1 (Votieraufgabe)
Gegeben sei das AWP

$$y'(x) = (1 + |y(x)|)^{-1}, \quad y(0) = 0 \quad \text{auf } [0, 10].$$

Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$ auf ganz $[0, 10]$.

Aufgabe 3.2 (Votieraufgabe)
Zeigen Sie, dass die folgenen AWPs keine Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzen:

(a) $(y'(x))^2 + y(x)^2 + 1 = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(b) $y'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(0) = 0.$

Aufgabe 3.3 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Zeigen Sie, dass für eine Lösung der *autonomen* d-dimensionalen Differentialgleichung $y' = f(y)$

$$y(x + h) = y(x) + hf(y) + \frac{1}{2}h^2 f'(y)f(y) + \frac{1}{6}h^3 \left(f(y)^T f''(y)f(y) + f'(y)^2 f(y)\right) + O(h^4)$$

gilt, wobei $f'(y) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ die Jacobi-Matrix von f ist, y (abkürzend) für $y(x)$ steht und wir für die zweite Ableitung die (formale) Schreibweise

$$u^T f''(y)v = \left(\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 f_i(y)}{\partial y_j \partial y_k} u_j v_k \right)_{i=1}^{d} \in \mathbb{R}^d$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ verwenden. Dabei genüge f der Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4.

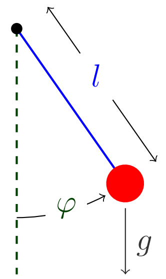
Aufgabe 3.4 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Es sei $y(x) : [x_i, x_{\text{end}}] \to \mathbb{R}$ die exakte Lösung des autonomen 1-dimensionalen AWPs

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_i) = y_i \in \mathbb{R},$$

wobei die Generalvoraussetzung aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung erfüllt sei.
Ferner sei y_{i+1} die numerische Approximation von $y(x_{i+1})$, die man durch einen Schritt mit dem Crank-Nicolson Verfahren mit der Schrittweite $h_i := x_{i+1} - x_i > 0$ ($x_{i+1} \in [x_i, x_{\text{end}}]$) erhält.
Bestimmen Sie ein maximales $p \in \mathbb{N}$, sodass

$$y_{i+1} - y(x_{i+1}) = O(h_i^{\,p+1}) \quad \text{für} \quad h_i \searrow 0$$

für alle AWP von obiger Form gilt, welche der Generalvoraussetzung genügen.



Aufgabe 3.5 (schriftliche Aufgabe + Programmieraufgbe)[1+2+3+1 Punkte]
Die Differentialgleichung

$$l\varphi''(t) + g\sin(\varphi(t)) = 0, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

modelliert das Verhalten eines Pendels, wobei l dessen Länge und g die Gravitationskonstante beschreibt. Wir betrachten ein Pendelmodell mit $l = 10$ cm und $g = 9,81$ m/s^2.

(a) Formen Sie die DGL zweiter Ordnung in eine DGL erster Ordnung (in allgemeiner Form) um.

(b) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Lösung der impliziten Gleichung im impliziten Euler-Verfahren und in der Crank-Nicolson Methode.

(c) Schreiben Sie MATLAB Programme

```
function [t,phi]=PendelExpEuler(t0,phi0,dotphi0,h,T),

function [t,phi]=PendelImplEuler(t0,phi0,dotphi0,h,T),

function [t,phi]=PendelCrankNicolson(t0,phi0,dotphi0,h,T),
```

zur numerischen Lösung des AWPs für die Startwerte $\varphi(t0) = \text{phi0}$, $\dot{\varphi}(t0) = \text{dotphi0}$ durch Verwendung des expliziten Eulers, des impliziten Eulers und der Crank-Nicolson Methode auf dem Intervall $[t0, T]$ mit Schrittweite h (in Sekunden). Die Programme sollen in **[t,phi]** die (diskrete) Approximation an den Graphen $(t, \varphi(t))$ mit $(t \in [to, T])$ zurückgeben. Benutzen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung impliziter Gleichungen, die im Fall der impliziten Methoden auftreten.

(d) Visualisieren Sie das Pendel für die Startwerte $t0 = 0$, $\text{phi0} = \frac{\pi}{4}$, $\text{dotphi0} = 0$ und eine Schrittweite von $h = 0.001$ bzw. $h = 0.005$. Verwenden Sie dabei die MATLAB-Funktion

```
function visualisierePendel(t,phi,T),
```

die Sie von der Veranstaltungshomepage herunterladen können. Fügen Sie ihrer Abgabe (zusätzlich zum Quellcode) jeweils die beiden Plots bei, die Sie zum Endzeitpunkt $T = 7$ erhalten, d.h. die Plots für die Schrittweiten $h = 0.001$ und $h = 0.005$ für alle drei Verfahren (insg. $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$).

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 03.05.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 03.05.2016 um 12:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL3_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL3_2016_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 3 werden in den Übungen zwischen dem 03-05.05.2016 besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__