

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 3

27.04.2016

Aufgabe 9. (Indizes und Ordnungen, 4 Punkte)

Sei G eine proendliche Gruppe und $H \leq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) $(G : H) = \text{kgV}\{(G : U) \mid U \leq G \text{ ist eine offene Untergruppe mit } H \leq U\}$.

(b) Ist \mathcal{U} eine Umgebungsbasis der Eins, bestehend aus offenen Normalteilern, so gilt:

$$(G : H) = \text{kgV}\{(G/U : HU/U) \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

(c) Ist $(\{G_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ ein surjektives projektives System proendlicher Gruppen über einer partiell geordneten, gerichteten Indexmenge I und $G := \varprojlim_{i \in I} G_i$, so gilt:

$$\#G = \text{kgV}\{\#G_i \mid i \in I\}.$$

(d) Ist $\{G_i \mid i \in I\}$ eine Familie proendlicher Gruppen, so gilt:

$$\#\left(\prod_{i \in I} G_i\right) = \prod_{i \in I} \#G_i.$$

Aufgabe 10. (die absolute Galoisgruppe eines endlichen Körpers, 4 Punkte)

Sei q eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen. Ferner sei $\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ ein algebraischer Abschluss. Bestimmen Sie die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$.

Aufgabe 11. (die absolute Galoisgruppe eines abzählbaren Körpers, 4 Punkte)

Sei K ein Körper mit abzählbar vielen Elementen. Ferner sei \bar{K}/K ein separabler Abschluss. Zeigen Sie, dass die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ eine abzählbare Basis (im topologischen Sinne) besitzt.

Aufgabe 12. (duale Gruppen, 4 Punkte)

(a) Sei G eine proendliche Gruppe und $S^1 \leq \mathbb{C}^\times$ die Untergruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1. Zeigen Sie:

$$\text{Hom}_{\text{cts}}(G, S^1) \cong \text{Hom}_{\text{cts}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Dabei wird S^1 bzw. \mathbb{Q}/\mathbb{Z} mit der Teilraumtopologie bzw. Quotiententopologie versehen.

(b) Bestimmen Sie $G^* = \text{Hom}_{\text{cts}}(G, S^1)$ für $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) und $G = \hat{\mathbb{Z}}$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **04.05.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Groupen