Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 4 04. Mai 2016

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Seien $N_i \subseteq G_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, daß

$$\prod_{i=1}^{n} N_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} G_i$$

ein Normalteiler ist, und zeigen Sie einen Isomorphismus

$$\prod_{i=1}^{n} G_i / \prod_{i=1}^{n} N_i \simeq \prod_{i=1}^{n} (G_i/N_i).$$

Aufgabe 14. (PGL_2, 4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_q$ ein (der) Köper mit q Elementen.

(a) Zeigen Sie:
$$|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)| = (q-1)q(q+1).$$

(b) Finden Sie Isomorphismen:
- (i) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$.
- (ii) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$.
- (iii) $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$.

Tipp: Lassen Sie die Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ durch Möbiustransformationen operieren. Dabei ist $\mathbb{F}_q$ ein (der) Körper mit q Elementen. Stören Sie sich nicht daran, daß wir $\mathbb{F}_4$ noch nicht konstruiert haben.

Aufgabe 15. (Elementarmatrizen, 4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n > 1$. Zu $\lambda \in K$ und $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, $\alpha \neq \beta$ sei

$$E_{\alpha\beta}(\lambda) = \mathbf{1} + \lambda \cdot (\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta})_{1 \leq i,j \leq n}$$

die Elementarmatrix, und die von allen Elementarmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ erzeugte Untergruppe sei

$$U = \langle E_{\alpha\beta}(\lambda) \ ; \ \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \ \alpha \neq \beta \text{ und } \lambda \in K \rangle.$$

(a) Zeigen Sie $U \subseteq \mathrm{SL}_n(K)$.

(b) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie, daß U alle Zeilenvertauschungsmatrizen (mit Vorzeichen, so daß die Determinante 1 ist) enthält: das sind zu $\alpha \neq \beta$ Matrizen $P_{\alpha\beta}$ mit

$$P_{\alpha\beta} e_i = \begin{cases} e_i & i \neq \alpha, \beta \\ e_\beta & i = \alpha \\ -e_\alpha & i = \beta. \end{cases}$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis ist.

(c) Berechnen Sie zu $a \in K^\times$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgern Sie, daß U alle Diagonalmatrizen mit Determinante 1 enthält.

(d) Überlegen Sie sich, daß man mit elementaren Zeilenumformungen jede Matrix aus $\mathrm{GL}_n(K)$ in Diagonalform bringen kann.

(e) Beweisen Sie

$$\mathrm{SL}_n(K) = \langle E_{\alpha\beta}(\lambda) \ ; \ \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \ \alpha \neq \beta \text{ und } \lambda \in K \rangle.$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Seien $n \geq 1$ und K ein Körper mit $2 \neq 0$. Sei D die Gruppe der Diagonalmatrizen

$$D = \left\{ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \ ; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^\times \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(K).$$

(a) Zeigen Sie: Matrizen aus $\mathrm{GL}_n(K)$ mit der gleichen Jordannormalform haben dasselbe Bild in der Kommutatorfaktorgruppe.

(b) Zeigen Sie: Für alle unipotenten oberen Dreiecksmatrizen A, d.h. obere Dreiecksmatrizen mit nur 1 auf der Diagonale, haben A und A^2 dieselbe Jordannormalform. Folgern Sie, daß

$$D/(D \cap [\mathrm{GL}_n(K), \mathrm{GL}_n(K)]) \simeq \mathrm{GL}_n(K)/[\mathrm{GL}_n(K), \mathrm{GL}_n(K)].$$

(c) Zeigen Sie, daß die Determinante einen Isomorphismus liefert:

$$\mathrm{GL}_n(K)/[\mathrm{GL}_n(K), \mathrm{GL}_n(K)] \xrightarrow{\sim} K^\times, \qquad A \mapsto \det(A).$$

Tipp: Benutzen Sie das Resultat aus der Linearen Algebra, daß jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ geschrieben werden kann als LSR mit L untere unipotente Dreiecksmatrix, $S \in D$ Diagonalmatrix, R obere unipotente Dreiecksmatrix. Verwenden Sie (a) für L und R, sowie für Diagonalmatrizen mit nur einem $\lambda_i \neq 1$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **11. Mai 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA`
