Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 4 04.05.2016

Aufgabe 13. (Kummertheorie, 6 Punkte)

Sei K ein Körper mit einem algebraischen Abschluss $\bar{K}$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $\operatorname{char} K \nmid n$ und die Gruppe der Einheitswurzeln $\mu_n \leq \bar{K}^\times$ in $K^\times$ enthalten ist. Für eine Zwischengruppe $(K^\times)^n \leq \Delta \leq K^\times$ definieren wir

$$\sqrt[n]{\Delta} := \{\alpha \in \bar{K} \mid \alpha^n \in \Delta\} \quad \text{und} \quad L_\Delta := K(\sqrt[n]{\Delta}).$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine wohldefinierte nichtausgeartete stetige Paarung

$$(\Delta/(K^\times)^n) \times \operatorname{Gal}(L_\Delta/K) \longrightarrow \mu_n, \quad (a,\sigma) \longmapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{a})}{\sqrt[n]{a}}.$$

Dabei werden $\Delta/(K^\times)^n$ und μ_n jeweils mit der diskreten Topologie versehen.

(b) $\operatorname{Gal}(L_\Delta/K)$ ist abelsch von Exponenten $d \in \mathbb{N}$ mit $d|n$. Ferner gilt unter der Einbettung $\mu_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ der Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_{\text{cts}}(\operatorname{Gal}(L_\Delta/K), \mu_n) \cong \operatorname{Hom}_{\text{cts}}(\operatorname{Gal}(L_\Delta/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(c) Die Paarung von (a) induziert Isomorphismen topologischer Gruppen

$$\Delta/(K^\times)^n \cong \operatorname{Hom}_{\text{cts}}(\operatorname{Gal}(L_\Delta/K), \mu_n) \quad \text{und} \quad \operatorname{Gal}(L_\Delta/K) \cong \operatorname{Hom}_{\text{cts}}(\Delta/(K^\times)^n, \mu_n).$$

Hinweis: Pontrjagin-Dualität.

Aufgabe 14. (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}\big(\mathbb{Q}(\sqrt{\mathbb{Q}^\times})/\mathbb{Q}\big)$.

—— bitte wenden ——

Aufgabe 15. (projektiver Limes von projektiven Limiten, 4 Punkte)

Seien I, J zwei partiell geordnete, gerichtete Indexmengen. Ferner sei $(G_i^{(j)})_{i\in I, j\in J}$ eine Familie proendlicher Gruppen. Des weiteren seien stetige Homomorphismen $\varphi_{ii'}^{(j)} : G_{i'}^{(j)} \to G_i^{(j)}$ sowie auch $\psi_i^{(jj')} : G_i^{(j')} \to G_i^{(j)}$ für $i, i' \in I$ und $j, j' \in J$ mit $i \leq i'$ und $j \leq j'$ derart gegeben, dass gilt:

(i) Für jedes $j \in J$ ist $\Gamma^{(j)} = (\{G_i^{(j)}\}_{i\in I}, \{\varphi_{ii'}^{(j)}\}_{i\leq i'})$ ein projektives System.

(ii) Für jede $j, j' \in J$ mit $j \leq j'$ definiert das Tupel $\psi^{(jj')} = (\psi_i^{(jj')})_i$ einen Homomorphismus zwischen den projektiven Systemen $\Gamma^{(j)}$ und $\Gamma^{(j')}$, so dass $(\{\Gamma^{(j)}\}_{j\in J}, \{\psi^{(jj')}\}_{j\leq j'})$ wiederum ein projektives System ist.

Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine Familie von Überganshomomorphismen $G_{i'}^{(j')} \to G_i^{(j)}$ für $(i, j), (i', j') \in I \times J$ mit $(i, j) \leq (i', j')$, die $\{G_i^{(j)}\}_{(i,j)\in I\times J}$ zu einem projektiven System macht

(b) Mit den Übergangshomomorphismen aus Teil (a) besteht ein natürlicher Gruppenisomorphismus

$$\varprojlim_{(i,j)} G_i^{(j)} \cong \varprojlim_j \left(\varprojlim_i G_i^{(j)} \right).$$

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Sei A eine (multiplikative) abelsche Gruppe mit einer Inklusionskette von Untergruppen

$$\ldots \subseteq A_{i+1} \subseteq A_i \subseteq \ldots \subseteq A_1 \subseteq A_0 = A.$$

Dadurch bilden $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ ein projektives System, indem wir die Inklusionen als Übergangsabbildungen nehmen. Mit $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ als Umgebungsbasis der Eins wird A dann eine (nicht notwendigerweise hausdorffsche) topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) $\varprojlim_i A_i = \bigcap_i A_i$.

(b) $\varprojlim_i{}^1 A_i = 0$ genau dann, wenn A vollständig ist, d.h. jede Cauchy-Folge in A konvergiert.

Dabei heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer topologischen Gruppe A eine **Cauchy-Folge**, wenn für jede offene Teilmenge $1 \in U \subseteq A$ ein $N_U \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_m^{-1}a_n \in U$ für alle $m, n \geq N_U$ gilt.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **11.05.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Gruppen`
