Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 5 11. Mai 2016

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei R ein kommutativer Ring mit $p = 0 \in R$.

(1) Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in R$ gilt:

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

(2) Zeigen Sie, daß $F : R \to R$ definiert durch $F(a) = a^p$ für alle $a \in R$ ein Ringhomomorphismus ist.

Tipp: Ein Beispiel eines solchen Rings mit $p = 0$ ist $R = \mathbb{F}_p$. Zeigen Sie die Aussage zuerst für $\mathbb{F}_p$ und dann für $a = 1$ und $b = X$ im Ring $R = \mathbb{F}_p[X]$.

Aufgabe 18. (4 Punkte)

Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$.

(1) Sei $u \in R^\times$ eine Einheit und $x \in R$ nilpotent. Zeigen Sie, daß $u + x$ eine Einheit ist.

(2) Zeigen Sie, daß $N(R) = \{x \in R \ ; \ x \text{ nilpotent}\}$ ein Ideal von R ist.

(3) Sei $a \in R$. Zeigen Sie: a ist nilpotent $\iff (1 - aX) = R[X]$.

(4) Sei $a \in R$. Zeigen Sie: a ist nilpotent genau dann, wenn es keinen Ringhomomorphismus $f : R \to S$ gibt mit $S \neq 0$, so daß $f(a) \in S^\times$.

Aufgabe 19. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Faktorringe R/I nach den folgenden Idealen $I \subseteq R$:

(1) $I = (15, 21, 35)$ in $R = \mathbb{Z}$.

(2) $I = (X^2 - 1, X^3 - 1)$ in $R = \mathbb{Q}[X]$.

(3) $I = (5X - 1)$ in $R = \mathbb{Z}[X]$.

(4) $I = (Y - f(X))$ in $R = K[X, Y]$ für einen Körper K und $f(X) \in K[X] \subseteq K[X, Y]$.

Aufgabe 20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

(1) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[i]$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

(2) Zeigen Sie, daß $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, definiert durch $N(a + bi) = a^2 + b^2$ multiplikativ ist: für alle $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ folgt

$$N(zw) = N(z)N(w).$$

(3) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[i]$ ein Hauptidealring ist.

Tipp: Welche Gründe kennen Sie, daß ein Ring ein Hauptidealring ist? Wie können Sie (2) für (3) nutzen?

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **18. Mai 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA`
