

## Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

### Präsenzaufgabenblatt 5

11. Mai 2016

---

#### Aufgabe P17.

Sei  $R$  ein Ring und  $x \in R$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt  $y \in R$  mit  $xy = yx = 1$ .
- (b) Es gibt  $y, z \in R$  mit  $xy = zx = 1$ .

#### Aufgabe P18.

Das Zentrum eines Rings  $R$  ist

$$Z(R) = \{a \in R ; ax = xa \text{ für alle } x \in R\}.$$

- (1) Zeigen Sie, daß  $Z(R)$  ein Unterring von  $R$  ist.
- (2) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $K$  ein Körper. Bestimmen Sie das Zentrum des Matrizenrings  $M_n(K)$ .
- (3) Sei  $R$  ein Ring mit Zentrum  $Z(R) = K$ . Bestimmen Sie das Zentrum von  $R[X]$  und von  $R[[X]]$ .

#### Aufgabe P19.

Sei  $A$  eine Menge und für jedes  $\alpha \in A$  ein Ideal  $I_\alpha$  im Ring  $R$  gegeben. Zeigen Sie, daß der Schnitt  $I$  ein Ideal von  $R$  ist:

$$I = \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

#### Aufgabe P20.

Sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Jedes  $0 \neq f \in K[[X]]$  ist von der Form

$$f = X^n \cdot u$$

mit einem  $n \in \mathbb{N}$  und einer Einheit  $u \in K[[X]]^\times$ .

- (2) Sei  $I \subseteq K[[X]]$  ein Ideal  $I \neq (0)$ . Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , so daß  $I = (X^n)$ .
- (3)  $K[[X]]$  ist ein Hauptidealring. Ist  $K[[X]]$  ein euklidischer Ring?

*Tipp:* Bestimmen Sie zunächst die Einheiten  $K[[X]]^\times$ .