Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Proendliche Gruppen

Sommersemester 2016

Übungsblatt 5 11.05.2016

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Sei I eine gerichtete Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei G_i eine Gruppe und A_i ein G_i-Modul. Ferner seien Gruppenhomomorphismen $\varphi_{ij} : G_j \to G_i$ und Homomorphismen abelscher Gruppen $f_{ij} : A_i \to A_j$ für $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gegeben, so dass gilt:

(i) $(\{G_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ ist ein projektives System.

(ii) $(\{A_i\}, \{f_{ij}\})$ ist ein injektives System.

(iii) Für $i \leq j$ gilt:

$$f_{ij}(\varphi_{ij}(\sigma_j) \cdot a_i) = \sigma_j \cdot f_{ij}(a_i) \quad \text{für alle } \sigma_j \in G_j \text{ und } a_i \in A_i.$$

Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe $A := \varinjlim_i A_i$ eine Modulstruktur über $G := \varprojlim_i G_i$ besitzt, die mit der G_i-Modulstruktur auf A_i für jedes $i \in I$ kompatibel ist.

Aufgabe 18. (Hilbert 90, 4 Punkte)

Sei L/K eine Galoiserweiterung mit $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. Damit wird $L^\times$ auf natürlicher Weise ein G-Modul. Sei ferner G zyklisch mit einem Erzeuger σ. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gilt **Hilberts Satz 90**: Ist $a \in L^\times$ mit $N_{L/K}(a) = 1$, so gibt es ein $\alpha \in L^\times$ mit $a = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$.

(ii) $H^1(G, L^\times) = 1$.

Hinweis zu (ii) $\Rightarrow$ (i) : *Zeigen Sie zunächst, dass die Zuordnung* $\sigma^m \mapsto \prod_{k=0}^{m-1} \sigma^k(a)$ *für* $a \in L$ *mit* $N(a) = 1$ *einen wohldefinierten* 1*-Kozykel definiert.*

Aufgabe 19. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und A eine (multiplikative) abelsche Gruppe. Ferner sei eine **Gruppenerweiterung** von G durch A gegeben, d.h. eine Gruppe E mit einer exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$G \times A \longrightarrow A,\ (\sigma, a) \longmapsto {}^{\sigma}a := \hat{\sigma} a \hat{\sigma}^{-1},$$

wobei $\hat{\sigma} \in E$ ein Urbild von $\sigma \in G$ aus der obigen Sequenz bezeichnet, eine *eindeutige* G-Modulstruktur auf A definiert wird.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 20. (H^2 und Gruppenerweiterungen, 6 Punkte)

Sei G eine Gruppe und A ein G-Modul, der im folgenden multiplikativ geschrieben wird. Wir betrachten die Menge aller Gruppenerweiterungen von G durch A derart, dass die dadurch induzierte G-Modulstruktur A gemäß Aufgabe 19 mit der vorgegebenen Struktur übereinstimmt. Zwei solche Erweiterungen E und E' heißen **äquivalent**, wenn es einen Isomorphismus $f : E \to E'$ derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies liefert eine Äquivalenzrelation und die Quotientenmenge wird mit $EXT(G, A)$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie; Ist $x : G \times G \to A$ ein **normierter** 2-Kozykel, d.h. ein 2-Kozykel mit $x(1, \sigma) = x(\sigma, 1) = 1$ für alle $\sigma \in G$, so ist die Menge $A \times G$, zusammen mit der Verknüpfung, die gegeben ist durch

$$(a, \sigma) \cdot (b, \tau) := (a\, {}^{\sigma}b\, x(\sigma, \tau), \sigma\tau) \quad \text{für alle } (a, \sigma), (b, \tau) \in A \times G,$$

eine Gruppe, die als Gruppenerweiterung von G nach A vorkommt.

(b) Zeigen Sie: Die Konstruktion aus Teil (a) liefert eine wohldefinierte Bijektion

$$H^2(G, A) \xrightarrow{\sim} EXT(G, A).$$

Geben Sie dabei die inverse Abbildung explizit an.

(c) Beschreiben Sie das Bild des neutralen Elements unter der Bijektion aus Teil (b).

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **18.05.2016** in der Vorlesung. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60049954/16_SS_Proendliche_Gruppen`
