6. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Diskrete und Numerische Mathematik für Informatiker"

Frankfurt, den 17.5.2016

Abgabetermin: 24.5.2016, 12:00 – vor der Vorlesung

21.) Betrachten Sie die Alphabete $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{0, 1\}$ sowie den Präfix-Code $c : A \to B^*$, gegeben durch

$$c(\alpha) := 0,\ c(\beta) := 10,\ c(\gamma) := 110,\ c(\delta) := 1110.$$

i) Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist ein B-Wort aus B^* in $c^*(A^*)$ enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort!

ii) Bestimmen Sie – im Falle der Existenz – die eindeutig bestimmten Urbilder der folgenden vier B-Wörter unter c^* bzw. begründen Sie – entweder mittels i) oder direkt – falls es kein Urbild gibt:

$$011001110,\ 011,\ 11110,\ 11100010100.$$

(6 Punkte)

22.) Es sei $|| \ ||$ eine *Norm* auf $\mathbb{R}^n$; das ist eine Abbildung $|| \ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$(N1)$ Es ist $||v|| \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$; ferner gilt folgende Äquivalenz: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

$(N2)$ Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot ||v||$.

$(N3)$ Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Dreiecksungleichung:* $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

Beweisen Sie, dass die Abbildung $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $d(v, w) := ||v - w||$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist.

(4 Punkte)

23.) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(I) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

(II) n ist eine Primzahl.

(4 Punkte)

24.) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so dass für passendes k mit $1 \leq k \leq n-1$ ein (n, k)-Code C über dem Körper mit 2 Elementen und $|C| \geq 26$ existiert, der bis zu einem Fehler korrigiert. Geben Sie auch einen entsprechenden (n, k)-Code – zum Beispiel mit Hilfe einer Kontrollmatrix – an, und interpretieren Sie das Ergebnis.

(6 Punkte)