

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2016

Übungsblatt 6

18. Mai 2016

Aufgabe 21. (4 Punkte)

- (1) Sei p eine Primzahl. Bestimmen sie in $\mathbb{F}_p[X]$ die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$\wp(X) = X^p - X.$$

- (2) Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}[i]$ vom Blatt 5.
- (a) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.
 - (b) Zeigen Sie: $1 + i$ ist irreduzibel.
 - (c) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von 2.

Tipp: Nutzen Sie die Abbildung $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Welchen Betrag hat $1 + i$?

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Berechnen Sie $d = \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$ in $K[X]$ für a_1, \dots, a_n gegeben als

- (a) $X^9 + 1, X^5 + 1$ für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und \mathbb{F}_{17} .
- (b) $X^5 + 4X^4 + 6X^3 + 4X^2 + X, X^2 - 1$ und $K = \mathbb{Q}$.
- (c) $X^8 + 1, X^6 + 1$ und $K = \mathbb{F}_2$.

Berechnen Sie auch eine $K[X]$ -Linearkombination $d = P_1 a_1 + \dots + P_n a_n$ mit $P_i \in K[X]$, die den ggT darstellt.

Aufgabe 23. (4 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring. Zeigen Sie, daß jedes $x \in R, x \neq 0$ nur in endlich vielen Idealen von R enthalten ist.

Aufgabe 24. (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Systeme von Kongruenzgleichungen im Hauptidealring R .

- (a) $R = \mathbb{Z}$ und

$$x \equiv -1 \pmod{6}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

(b) $R = \mathbb{Z}$ und

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{10} \\x &\equiv -2 \pmod{11} \\x &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

(c) $R = \mathbb{F}_2[X]$ und

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{(X)} \\x &\equiv 0 \pmod{(X+1)}\end{aligned}$$

(d) $R = \mathbb{C}[X]$ und

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{(X-1)} \\x &\equiv -1 \pmod{(X+1)} \\x &\equiv X+1 \pmod{(X^2+1)}\end{aligned}$$

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **25. Mai 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/60046116/16_SS_GdA
