Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

---

5. Übungsblatt (erschienen am 11.05.2016)

Aufgabe 5.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Lösen Sie Aufgabe 4.4 für ein allgemeines (nicht notwendigerweise skalares) AWP, d.h. $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ für $d \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5.2 (schriftliche Aufgabe)[1+3+1 Punkte]
(a) Bestimmen Sie die maximale Konsistenzordnung für die Verfahren aus Abschnitt 1.3.4 der Vorlesung.
(b) Prüfen Sie für die drei RKVs (geg. durch die Butcher-Tableaus)

$$\begin{array}{c|c} c_1 & A_1 \\ \hline & {b_1}^T \end{array} := \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} c_2 & A_2 \\ \hline & {b_2}^T \end{array} := \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 0 & 1/6 \end{array}$$

und $\begin{array}{c|c} c_2 & A_2 \\ \hline & \left({b_1}^T \; 0\right) \end{array}$, ob sie mindestens die Konsistenzordnung 3 besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass es kein von b_1 verschiedenes $\hat{b}$ gibt, sodass das RKV $\begin{array}{c|c} c_1 & A_1 \\ \hline & \hat{b}^T \end{array}$ Konsistenzordnung 3 besitzt.

Aufgabe 5.3 (Programmieraufgabe)[2 Punkte]
Erstellen Sie einen Fehlerplot wie in Aufgabe 4.5 (b) (für die gleiche Problemstellung und die gleichen Schrittweiten) für die Verfahren aus Aufgabe 5.2 (b) und schließen Sie von der Steigung der Graphen auf die Konsistenzordnung der Verfahren.

Aufgabe 5.4 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]
Bei der Implementierung eines Einschrittverfahrens ist es sinnvoll die Schrittweite pro Schritt gerade so klein zu wählen, dass eine gewünschte Genauigkeit noch eingehalten wird. Effizient lässt sich dies für geeignete RKVs mithilfe eines eingebetteten Kontrollverfahrens realisieren.
Vorgehensweise: Zu einem gegebenen AWP werden die Näherungen y_{i+1} bzw. $\hat{y}_{i+1}$ an die Lösung y mit einem s-stufigen RKV (geg. durch $A, b1, c$) mit Konsistenzordnung p bzw. mit einem s-stufigen RKV (geg. durch $A, b2, c$) mit Konsistenzordnung $\hat{p} = p + 1$ berechnet. Da beide Verfahren mit dem gleichen A und c arbeiten, können sie weitestgehend simultan berechnet werden, sodass der Rechenaufwand nicht sonderlich erhöht wird. Man spricht dann von eingebetteten RKVs, die sich mit dem erweiterten Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b1^T \\ \hline & b2^T \end{array}$$

beschreiben lassen. Nach einem Schritt[1]

$$y_{i+1} = \hat{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b1_j f(x_i + c_j h_i, \eta_j), \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_i \sum_{j=1}^{s} b2_j f(x_i + c_j h_i, \eta_j)$$

wird mithilfe des Kotrollverfahrens der Fehlerschätzer $\delta_{i+1} = \|y_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\|$ berechnet. Abhängig von einer (selbst vorgegebenen) Fehlertoleranz $\texttt{tol} > 0$ und einem Parameter τ (der etwas kleiner als 1 gewählt werden sollte) wird die Schrittweitengröße[2]

$$h = \tau \left(\frac{\texttt{tol}}{\delta_{i+1}} \right)^{1/(p+1)} h_i$$

angepasst. Gilt nun $\delta_{i+1} < \texttt{tol}$, dann wird mit $h_{i+1} = h$ der nächste Schritt begonnen, andernfalls wird der letzte Schritt mit der verkleinerten Schrittweite $h_i = h$ wiederholt.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [xi,hat_yi] = RKV_expl_embedded(A,b1,b2,c,f,y0,x0,T,h0,tol,tau,p),
```

die nach obigen Schema (adaptive Schrittweitensteuerung mit $h_0 = \mathrm{h0}, \mathrm{tau} = \tau$) für ein explizites eingebettetes RKV den diskreten Näherungsgraphen [xi, hat_yi] an den Lösungsgraphen des AWPs $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(\mathrm{x0}) = \mathrm{y0} \in \mathbb{R}^d$ auf [x0,T] berechnet.

(b) Testen Sie ihr Programm anhand des AWPs

$$\dot{y}_1(x) = 1 + y_1(x)^2 y_2(x) - 4y_1(x),\ \dot{y}_2(x) = 3y_1(x) - y_1(x)^2 y_2(x), \quad y_1(0) = 1.01,\ y_2(0) = 3$$

auf dem Intervall $[0, 20]$ mit dem eingebetteten RKV $\begin{array}{c|c} c_2 & A_2 \\ \hline & b_2^T \\ \hline & (b_1^T\ 0) \end{array}$,

wobei A_2, b_1, b_2, c_1 wie in Aufgabe 5.2 (b) angegeben und $\texttt{h0} = 1$, $\texttt{tol} = 10^{-5}$, $\tau = 0.9$ sowie $p = 3$ seien. Plotten Sie

(i) die Näherungsgraphen zu [xi, hat_yi(1,:)] und [xi, hat_yi(2,:)]

(ii) die Schrittweiten hi gegen xi mit hi = xi(2:end) – xi(1:end-1).

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 17.05.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 17.05.2016 um 12:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL5_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL5_2016_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 5 werden in den Übungen zwischen dem 18-19.05.2016 besprochen.

[1] Bei der Berechnung von y_{i+1} "startet" man bewusst bei $\hat{y}_i$.

[2] Überlegen Sie sich, warum diese Formel Sinn macht und wie man den Fall $\delta_{i+1} = 0$ einfach abfangen kann.

* **Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**