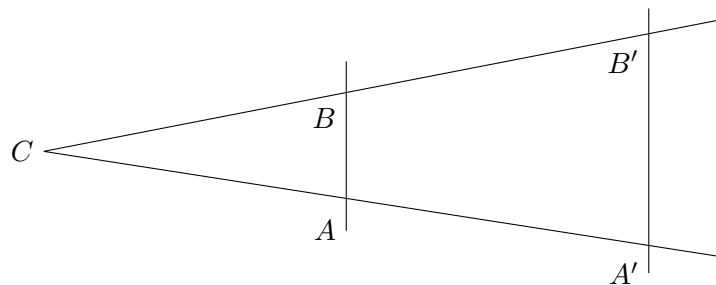


Übungsblatt 7

Wochenaufgabe 1 (8 Punkte)

Beweisen Sie den 2. Strahlensatz: In der Figur



gilt: $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|CA'|}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Dreiecke $\triangle A'BC$ und $\triangle A'B'C$.

Wochenaufgabe 2 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Nullstellen von

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(nx) \text{ für } n \in \mathbb{N}; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

Die beiden Plenumsaufgaben diese Woche sind der Hauptklausur des Sommersemesters 2015 entnommen und sollen als Klausurvorbereitung dienen.

Plenumsaufgabe 1

- (a) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Begründen Sie, ob die folgenden Folgen für $n \rightarrow \infty$ konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$x_n = \log_a(n) - \log_a(n+1), \quad y_n = n \cdot a^{\frac{1}{n^2}}$$

- (b) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
- (c) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge mit $b_n = |a_n|$. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Definition in (b):

Wenn $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann konvergiert auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Plenumsaufgabe 2

Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-1) = f(1) = 0$.

- (a) Die konstante Funktion $f(x) = 0$ ($x \in [-1, 1]$) ist ein Beispiel für eine solche Funktion. Finden Sie ein weiteres.
- (b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige stetige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-1) = f(1) = 0$ gilt: Es existiert ein $c \in [-1, 0]$, das

$$f(c) = f(c+1)$$

erfüllt.