Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 1 01. Juni 2016

Aufgabe 1. (ebene projektive Geometrie, 4 Punkte)

Sei K ein Körper. Ferner seien $g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ verschiedene Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(K)$, so dass sich g_1, g_2, g_3 in einem Punkt A und h_1, h_2, h_3 in einem anderen Punkt B schneiden, und $A \notin h_1, h_2, h_3$ und $B \notin g_1, g_2, g_3$. Für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ sei C_{ij} der Schnittpunkt in $g_i \cap h_j$.

Zeigen Sie, dass sich die Geraden $(C_{12}C_{21})$, $(C_{13}C_{31})$ und $(C_{23}C_{32})$ in einem Punkt schneiden.

Tipp: Überlegen Sie sich zunächst, warum die Punkte A, B, C_{11} nicht kollinear sind. Somit können Sie ohne Einschränkung annehmen, dass $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$ und $C_{11} = [0 : 0 : 1]$.

Aufgabe 2. (projektive vs affine Ebene, 4 Punkte)

Sei $(\mathscr{P}, \mathscr{G})$ eine affine Ebene. Zwei Geraden $g, h \in \mathscr{G}$ heißen *parallel* (im Zeichen $g \parallel h$), wenn sie entweder gleich sind oder gar keinen Schnittpunkt haben.

(a) Zeigen Sie, dass die Parallelität eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{G}$ definiert.

Die Äquivalenzklasse einer Geraden $g \in \mathscr{G}$ bzgl. der Parallität wird im folgenden mit $[g] = \{h \in \mathscr{G} \mid g \parallel h\}$ bezeichnet.

(b) Wir definieren das Paar $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{G}})$ aus $(\mathscr{P}, \mathscr{G})$ durch

$$\bar{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \,\dot{\cup}\, \{[g] \mid g \in \mathscr{G}\} \quad \text{und} \quad \bar{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \,\dot{\cup}\, \{g_\infty\}$$

Darauf definieren wir folgende Inzidenzrelation: Für $P \in \bar{\mathscr{P}}$ und $g \in \bar{\mathscr{G}}$ gilt $P \in g$ genau dann, wenn einer der folgenden Fälle auftritt:

- $g \in \mathscr{G}$, $P \in \mathscr{P}$ und $P \in g$ (in der affinen Ebene), oder
- $g \in \mathscr{G}$ und $P = [g]$, oder
- $g = g_\infty$ und $P = [h]$ für ein $h \in \mathscr{G}$.

Zeigen Sie, dass $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{G}})$ eine projektive Ebene ist.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 3. (affine Räume, 4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Ist A ein affiner Raum mit V als Vektorraum der Translationen, so gibt es eine Abbildung

$$A \times A \longrightarrow V, \quad (P,Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ} \ \text{ mit } \ \overrightarrow{PQ} + P = Q,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $P \in A$ und jedem $v \in V$ existiert genau ein $Q \in A$ mit $v = \overrightarrow{PQ}$.

(ii) Für alle $P, Q, R \in A$ gilt: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Bemerkung – In diesem Fall heißt $\overrightarrow{PQ}$ der ***Verbindungsvektor*** *von P nach Q.*

(b) Ist $A \neq \emptyset$ gegeben mit einer Abbildung $A \times A \to V$, die die Eigenschaften (i) und (ii) aus Teil (a) erfüllt, so wird A mit

$$V \times A \longrightarrow A, \quad (v, P) \mapsto Q \ \text{ mit } \ v = \overrightarrow{PQ},$$

ein affiner Raum mit V als Vektorraum der Translationen.

Aufgabe 4. (affin-lineare Bewegungen, 1+1+2 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für eine affin-lineare Bewegung $f = (A, b) \in \mathrm{Aff}^n(K)$ (d.h. $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{A}^n(K)$) definieren wir die Menge der **Fixpunkte**

$$\mathrm{Fix}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(K) \mid f(x) = x\}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, so ist $\mathrm{Fix}(f)$ ein affiner Unterraum in $\mathbb{A}^n(K)$ der Dimension $n - \mathrm{rg}(\mathbf{1}_n - A)$.

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{Fix}(f)$ kann nur leer sein, wenn 1 als Eigenwert von A auftaucht. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

(c) Sei nun $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und $f = (A, b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(f)$ und skizzieren Sie sie in der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Geben Sie außerdem eine geometrische Interpretation von f an.

Tipp: Bestimmen Sie dazu die Eigenwerte von A sowie zugehörigen Eigenvektoren.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **08. Juni 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`
