Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Präsenzaufgabenblatt 1 01. Juni 2016

Aufgabe P1. (Geraden in der projektiven Ebene)

Sei K ein Körper. Für $a \in K^3 \setminus \{0\}$ definieren wir

$$g_a := \{x \in \mathbb{P}^2(K) \mid a^t x = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2(K).$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede $a \in K^3 \setminus \{0\}$ ist g_a eine Gerade in der projektive Ebene $\mathbb{P}^2(K)$. Außerdem ist g_a bis auf skalares Vielfaches von a eindeutig bestimmt.

(b) Sind $a = (a_1, a_2, a_3)^t$, $b = (b_1, b_2, b_3)^t \in K^3 \setminus \{0\}$ und $c_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, so gilt:

$$g_a \cap g_b = \begin{cases} g_a = g_b, & \text{falls } c_{12} = c_{23} = c_{31} = 0 \\ \{[c_{23} : c_{31} : c_{12}]\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Für $a, b, c \in K^3 \setminus \{0\}$ schneiden sich die Geraden g_a, g_b, g_c genau dann in einem Punkt, wenn a, b, c linear abhängig sind.

(d) Ist $A \in \mathrm{GL}_3(K)$, so ist $A(g_a) = g_{(A^{-1})^t a}$.

Bemerkung – Die Wirkung von $\mathrm{GL}_3(K)$ *auf den Geraden in* $\mathbb{P}^2(K)$ *induziert laut* (a) *eine Wirkung von* $\mathrm{PGL}_3(K)$*. Außerdem kann man analog zur Vorlesung zeigen, dass* $\mathrm{PGL}_3(K)$ *transitiv auf drei Geraden, die sich nicht schneiden, operiert.*

Aufgabe P2. (projektive vs affine Ebene)

Der *Kleiner Satz von Desargues* lautet wie folgt:

> Sei K ein Körper und seien $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{A}^2(K)$ derart, dass die Geraden (AA'), (BB') und (CC') parallel sind. Dann gilt:
>
> Ist (AB) parallel zu $(A'B')$ und (BC) parallel zu $(B'C')$, so ist (CA) parallel zu $(C'A')$

Wie hängt dieser Satz mit dem Satz von Desargues für die projektive Ebene aus der Vorlesung zusammen?

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe P3. (affin-lineare Bewegungen)

Für $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$ definieren wir folgende affin-lineare Bewegung

$$f_{A,b} : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R}),\ x \mapsto Ax + b$$

Bestimmen Sie das Bild von $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ unter $f_{A,b}$ für

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.