Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 2 08. Juni 2016

Auf diesem Blatt bezeichne stets K einen Körper.

Aufgabe 5. (Komplexifizierung, 4 Punkte)

Für einen beliebigen reellen Vektorraum V sei die **Komplexifizierung** definiert durch

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert die Abbildung $\mathbb{C} \times V \to V_{\mathbb{C}},\ (\mu, v) \mapsto (\lambda\mu) \otimes v$ eine wohldefinierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $m_\lambda : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$.

(b) Durch die skalare Multiplikation

$$\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}},\ (\lambda, x) \longmapsto m_\lambda(x)$$

wird $V_{\mathbb{C}}$ ein komplexer Vektorraum.

(c) Zu jedem $x \in V_{\mathbb{C}}$ gibt es eindeutig bestimmte $v, w \in V$ mit

$$x = 1 \otimes v + \mathrm{i} \otimes w.$$

(d) Ist $n := \dim V < \infty$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V, so ist $(1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 6. (Bidualraum und Paarungen, 2+2 Punkte)

Seien V, W Vektorräume über K. Zeigen Sie:

(a) Die Zuordnung

$$\varphi_V : V \longrightarrow (V^*)^*,\ v \longmapsto (\varphi_V(v) : \pi \in V^* \mapsto \pi(v) \in K),$$

definiert eine injektive lineare Abbildung. Diese ist sogar ein Isomorphismus, falls $\dim V < \infty$

(b) Ist $f : V \times W \to K$ eine Paarung, so gilt:

$$(r_f)^* \circ \varphi_V = \ell_f.$$

Dabei bezeichnet wie in der Vorlesung $\ell_f : V \to W^*$ bzw. $r_f : W \to V^*$ die links- bzw. rechtspartielle Auswertung und $(r_f)^* : (V^*)^* \to W^*$ die zu r_f duale Abbildung.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 7. (Duale Basis, 2+2 Punkte)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Ferner sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V und $\mathscr{B}^*$ die dazu duale Basis. Zeigen Sie:
$$S_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}^*} = \mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{-1}.$$
Hierbei bezeichnet $S_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}^*}$ wie in der Vorlesung Lineare Algebra die Basiswechselmatrix von $\mathscr{B}^*$ nach $\mathscr{B}$.

(b) Zeigen Sie, dass
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto x^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y,$$
eine perfekte symmetrische Bilinearform definiert, und bestimmen Sie die zur Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ duale Basis bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Aufgabe 8. (adjungierte Endomorphismen, 2+2 Punkte)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt **selbstadjungiert** (bzw. **schiefadjungiert**), wenn gilt: $f^* = f$ (bzw. $f^* = -f$). Zeigen Sie:

(a) Ein Endomorphismus $f : V \to V$ ist genau dann selbstadjungiert bzw. schiefadjungiert, wenn
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_f : V \times V \longrightarrow K, \; (v, w) \longmapsto \langle v, f(w)\rangle$$
eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische Bilinearform definiert.

(b) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $V = K^n$, so liefert $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ genau dann einen bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ selbstadjungierten bzw. schiefadjungierten Endomorphismus $L_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, wenn A symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch ist (d.h. $A^t = A$ bzw. $-A$).

Tipp: Was ist in diesem Fall die zur Standardbasis $\mathscr{E}$ duale Basis?

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **15. Juni 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`
