Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Präsenzaufgabenblatt 2 08. Juni 2016

Aufgabe P4. (Tensorprodukte)

Sei K ein Körper und (e_1, e_2) die Standardbasis des K^2. Zeigen Sie:

(a) $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ bilden eine Basis des K-Vektorraums $K^2 \otimes_K K^2$.

(b) Es gibt keine Vektoren $v, w \in K^2$, so dass $v \otimes w = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$ in $K^2 \otimes_K K^2$.

Aufgabe P5. (Paarungen und Gramm'sche Matrizen)

Entscheiden Sie, ob es sich jeweils um eine Paarung von Vektorräumen über $\mathbb{Q}$ handelt, und bestimmen Sie ggf. die Gramm'sche Matrix bzgl. der Standardbasen.

(a) $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 - x_2 + 2y_1 + y_2$.

(b) $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto 3x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3$.

(c) $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1x_2 - 2y_1y_3 + 3y_2y_3$.

Aufgabe P6. (symmetrische und alternierende Bilinearformen)

Entscheiden Sie jeweils durch direkte Verifikation bzw. anhand der Gramm'schen Matrix bzgl. der Standardbasis, ob es sich im folgenden um eine symmetrische bzw. alternierende Bilinearform über $\mathbb{Q}$ handelt:

(a) $f_1 : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

(b) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1$.

(c) $f_3 : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_2$.

— bitte wenden —

Aufgabe P7. (duale Basis)

Sei $\mathscr{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^2$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ferner sei $f : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ eine Bilinearform, die gegeben ist durch

$$\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f perfekt und symmetrisch ist, und bestimmen Sie die duale Basis $\mathscr{E}^*$ bzgl. f.

Aufgabe P8. (doppelt duale Basis)

Sei K ein Körper und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit einer perfekten symmetrischen Bilinearform. Ferner sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V. Zeigen Sie:

$$(\mathscr{B}^*)^* = \mathscr{B}.$$

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`