§ 6 Interpolation durch Polynome

Bemerkungen 6.1:

i) Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 0$ hat ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{R}$ die Gestalt

$$(*) \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \quad \text{mit } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und } a_n \neq 0.$$

Dem Null-Polynom ordnen wir keinen Grad zu.
Ist P wie in $(*)$, so heißt a_n der Leitkoeffizient von P.

ii) Für $n \geq 0$ setzen wir ferner

$$\Pi_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Menge Π_n enthält also das Null-Polynom sowie diejenigen Polynome, die höchstens den Grad n haben.

iii) Es sei P ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient a. Weiter nehmen wir an:
P habe n paarweise verschiedene Nullstellen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(**) \qquad P(x) = a \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) = a \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Das bedeutet:
P läßt sich vollständig faktorisieren und kann keine weitere Nullstelle besitzen.
Insbesondere besitzt jedes Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen.

Definition 6.2:

Für $n \geq 0$ seien $n+1$ paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n$ gegeben. Dann sind die zugehörigen Lagrange'schen Interpolationspolynome $L_0, L_1, \dots, L_n$ vom Grad n definiert durch

$$(6.2)\qquad L_i(x) := \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Bemerkung 6.3:

Für $x_0, \dots, x_n, L_0, \dots, L_n$ wie in Definition 6.2 gilt:

$$(6.3)\qquad L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Bemerkung 6.4, Die Lagrange'sche Interpolationsaufgabe:

Gegeben seien $n+1$ Stützpunkte

$$(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq i \leq n, \text{ mit } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j.$$

Bestimme ein Polynom $P \in \Pi_n$ mit

$$(6.4)\qquad P(x_i) = f_i \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

Satz 6.5:

Die Lagrange'sche Interpolationsaufgabe (6.4) ist stets eindeutig lösbar.
Insbesondere ist das gesuchte Interpolationspolynom P gegeben durch

$$(6.5)\qquad P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_i(x) = f_0 \cdot L_0(x) + \dots + f_n \cdot L_n(x).$$

Beweis:

Nachweis der Existenz:

Sei P wie in (6.5). Zunächst hat P höchstens den Grad n, weil $L_0, \dots, L_n$ -genau- den Grad n haben.

Weiter liefert (6.3) für $0 \leq j \leq n$

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_i(x_j) = f_j$$

wie gewünscht.

Nachweis der Eindeutigkeit:

Es sei auch $Q \in \Pi_n$ mit $Q(x_i) = f_i$ für $0 \leq i \leq n$.
Für $R := P - Q \in \Pi_n$ folgt dann:

$$R(x_i) = f_i - f_i = 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Das Polynom R hat also mindestens $n+1$ Nullstellen, nämlich $x_0, \dots, x_n$.
Wegen $R \in \Pi_n$ ist das nach Bemerkung 6.1 iii) nur möglich, wenn R das Null-Polynom ist.
Damit folgt: $P = Q$.

$\square$

Im folgenden werden Algorithmen zur Berechnung von Interpolationspolynomen vorgestellt, die besser geeignet sind als die Formel (6.5).

Konvention 6.6:

Im folgenden seien $n+1$ Stützpunkte

$(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$ für $0 \le i \le n$ mit $x_i \ne x_j$ für $i \ne j$

fixiert.

Für paarweise verschiedene Indizes $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ bezeichne $P_{i_0 \dots i_k}$ das – nach Satz 6.5 eindeutig bestimmte – Polynom in Π_k mit

(6.6) $\quad P_{i_0 \dots i_k}(x_{i_\ell}) = f_{i_\ell}$ für $0 \le \ell \le k$.

Satz 6.7:

i) Für $0 \le i \le n$ gilt:

(6.7a) $\quad P_i(x) = f_i$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Für $0 < k \le n$ und $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ mit $|\{i_0, \dots, i_k\}| = k+1$ gilt:

(6.7b)
$$P_{i_0 \dots i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0}) \cdot P_{i_1 \dots i_k}(x) - (x - x_{i_k}) \cdot P_{i_0 \dots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Beweis:

i) gilt nach (6.6) – mit $k=0$ und $i_0 = i$, weil P_i als Element von Π_0 konstant sein muss.

ii) Wir führen Induktion nach k.

Es bezeichne $q(x)$ die „rechte" Seite in (6.7b).

Klar ist: $q(x) \in \Pi_k$.

Zu zeigen ist noch:

$$q(x_{i_\ell}) = f_{i_\ell} \quad \text{für } 0 \le \ell \le k.$$

Wir erhalten – laut Induktionsannahme:

$$q(x_{i_0}) = \frac{-(x_{i_0} - x_{i_k}) \cdot P_{i_0 \dots i_{k-1}}(x_{i_0})}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_0} \quad ,$$

$$q(x_{i_k}) = \frac{(x_{i_k} - x_{i_0}) \cdot P_{i_1 \dots i_k}(x_{i_k})}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_k}$$

sowie für $0 < l < k$:

$$q(x_{i_l}) = \frac{(x_{i_l} - x_{i_0}) \cdot P_{i_1 \dots i_k}(x_{i_l}) - (x_{i_l} - x_{i_k}) \cdot P_{i_0 \dots i_{k-1}}(x_{i_l})}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

$$= \frac{(x_{i_l} - x_{i_0}) - (x_{i_l} - x_{i_k})}{x_{i_k} - x_{i_0}} \cdot f_{i_l} = f_{i_l} \, .$$

$\square$

<u>Konvention 6.8:</u>

Zur Abkürzung setzen wir im folgenden

(6.8a) $\qquad P_{i+j,j} := P_{i\; i+1 \dots i+j}$ für $0 \leq j \leq i+j \leq n$.

Nach (6.7b) gilt dann also für $j > 0$:

(6.8b) $\qquad P_{i+j,j}(x) = \dfrac{(x - x_i) \cdot P_{i+j,j-1}(x) - (x - x_{i+j}) \cdot P_{i+j-1,j-1}(x)}{x_{i+j} - x_i}$.

<u>Bemerkung 6.9, Das Neville-Schema für $n=3$:</u>

$P_{0123} = P_{3,3}$ wird mittels (6.8b) nach folgendem Schema berechnet:

$$\begin{tikzcd}
x \backslash k & 0 & 1 & 2 & 3 \\
x_0 & f_0 = P_{0,0} \arrow[dr] & & & \\
& & P_{1,1} \arrow[dr] & & \\
x_1 & f_1 = P_{1,0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{2,2} \arrow[dr] & \\
& & P_{2,1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{3,3} \\
x_2 & f_2 = P_{2,0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{3,2} \arrow[ur] & \\
& & P_{3,1} \arrow[ur] & & \\
x_3 & f_3 = P_{3,0} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Beispiel:

Gegeben seien die Stützpunkte

$(x_0, f_0) = (1,2)$, $(x_1, f_1) = (2,1)$, $(x_2, f_2) = (3,2)$.

Gesucht ist $P \in \Pi_2$ mit $P(x_i) = f_i$ für $0 \le i \le 2$.

Wir erhalten mittels (6.8b):

$$P_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot f_1 - (x-x_1)\cdot f_0}{x_1 - x_0}$$

$$= (x-1)\cdot 1 - (x-2)\cdot 2 = -x+3 \quad ;$$

$$P_{2,1}(x) = \frac{(x-x_1)\cdot f_2 - (x-x_2)\cdot f_1}{x_2 - x_1}$$

$$= (x-2)\cdot 2 - (x-3)\cdot 1 = x-1 \quad ;$$

$$P_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot P_{2,1}(x) - (x-x_2)\cdot P_{1,1}(x)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left((x-1)\cdot(x-1) - (x-3)(-x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x^2-2x+1+x^2-6x+9)$$

$$= x^2-4x+5 \ .$$

Vor der Formulierung des nahe verwandten Aitken-Schemas bemerken wir zunächst:

Bemerkung 6.10:

Sind $i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ paarweise verschieden, so gilt für jede Bijektion $\sigma: \{i_0, \dots, i_k\} \to \{i_0, \dots, i_k\}$:

(6.10) $$P_{i_0 \cdots i_k} = P_{\sigma(i_0)\cdots\sigma(i_k)} \ .$$

Bemerkung 6.11, Das Aitken-Schema für $n=3$:

P_{0123} wird mittels (6.7b) und (6.10) nach folgendem Schema berechnet:

$x \backslash k$	0	1	2	3
x_0	$f_0 = P_0$			
x_1	$f_1 = P_1$	P_{01}		
x_2	$f_2 = P_2$	P_{02}	P_{012}	
x_3	$f_3 = P_3$	P_{03}	P_{013}	P_{0123}

Definition 6.12:

Für $0 \le i \le i+k \le n$ ist die <u>k-te dividierte Differenz</u> $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ rekursiv definiert durch:

(6.12a) $\quad f[x_i] := f_i \,,$

(6.12b) $$f[x_i, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

für $0 \le i < i+k \le n$.

Beispiel:

Es ist $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$ für $0 \le i < n$.

Satz 6.13, Die Newton-Darstellung:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(6.13) $$P_{0\dots n}(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0, \dots, x_j] \cdot \left(\prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \right).$$

Beweisskizze - durch Induktion nach n:

- Für $n = 0$ ist (6.13) trivial.

- Für $n \geq 0$ und $0 \leq j \leq n$ gilt:

$$P_{0 \dots n}(x_j) = f_j = P_{0 \dots n\, n+1}(x_j) .$$

Das bedeutet:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \quad P_{0 \dots n\, n+1}(x) = P_{0 \dots n}(x) + a \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

- a ist der Koeffizient von x^{n+1} des Polynoms $P_{0 \dots n\, n+1}$.

- Aus (6.7a), (6.7b), (6.12a) und (6.12b) folgt -induktiv- durch Koeffizientenvergleich:

$$a = f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Bemerkung 6.14:

Setzen wir $a_j := f[x_0, \dots, x_j]$ für $0 \leq j \leq n$, so gilt gemäß (6.13) für alle $x \in \mathbb{R}$:

(6.14 a) $\quad P(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + a_n \cdot (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$

Ähnlich wie beim Horner-Algorithmus folgt weiter:

(6.14 b) $\quad P(x) = (\dots (a_n \cdot (x - x_{n-1}) + a_{n-1}) \cdot (x - x_{n-2}) + \dots + a_1) \cdot (x - x_0) + a_0.$

Konvention 6.15:

Für $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ bezeichne $I[a_0, \dots, a_m] \subseteq \mathbb{R}$ das kleinste Intervall, das $a_0, \dots, a_m$ enthält.

Satz 6.16, Das Restglied bei der Polynom-Interpolation:

Es seien $x_0, \dots, x_n, \overline{x} \in \mathbb{R}$ mit $x_i \neq x_j$ für $0 \leq i < j \leq n$, sei $I := I[x_0, \dots, x_n, \overline{x}]$, und $f: I \to \mathbb{R}$ sei $n+1$mal differenzierbar. Sei $P = P_{0 \dots n} \in \Pi_n$ die Lösung der Lagrange'schen Interpolationsaufgabe

(6.16 a) $\quad P(x_i) = f(x_i) \quad$ für $0 \leq i \leq n$,

und definiere $\omega \in \Pi_{n+1}$ durch

(6.16 b) $$\omega(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit:

(6.16 c) $$f(\overline{x}) - P(\overline{x}) = \omega(\overline{x}) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Beweis:

(6.16 c) ist klar im Falle $\overline{x} \in \{x_0, \dots, x_n\}$; gelte also:

$$\overline{x} \neq x_j \quad \text{für alle } j \text{ mit } 0 \leq j \leq n.$$

Definiere $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

(*) $$F(x) := f(x) - P(x) - \frac{f(\overline{x}) - P(\overline{x})}{\omega(\overline{x})} \cdot \omega(x).$$

F besitzt in I mindestens die - paarweise verschiedenen $n+2$ Nullstellen $x_0, \dots, x_n, \overline{x}$.

$(n+1)$-fache Anwendung des Satzes von Rolle (siehe Satz 10.14 im WS 2015/16) liefert:

Für $1 \leq j \leq n+1$ besitzt $F^{(j)}$ in I mindestens $n+2-j$ Nullstellen. Insbesondere besitzt $F^{(n+1)}$ eine Nullstelle $\xi \in I$.

Wegen $P^{(n+1)} \equiv 0$ und $\omega^{(n+1)} \equiv (n+1)!$ folgt damit aus (*):

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(\overline{x}) - P(\overline{x})}{\omega(\overline{x})} \cdot (n+1)!$$

Äquivalenzumformung liefert (6.16c). $\square$

Bemerkungen 6.17:

i) Außerhalb von $I[x_0, \dots, x_n]$ wächst $|\omega(x)|$ stark an. Bei der Verwendung von $P_{0\dots n}$ zur Approximation von f außerhalb von $I[x_0, \dots, x_n]$ ist daher ein großer Fehler zu erwarten; man spricht dann von Extrapolation.

ii) Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\Delta_m = \{a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < \dots < x_m^{(m)} = b\}$$

eine Einteilung eines gegebenen Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ in m Teilintervalle.

Für eine gegebene Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, die überall stetig ist, bezeichne $P_{\Delta_m} \in \Pi_m$ die Lösung der Interpolationsaufgabe

$$P_{\Delta_m}(x_i^{(m)}) = f(x_i^{(m)}) \quad \text{für } 0 \le i \le m.$$

Es gilt dann der

Satz von Faber:

Zu jeder Folge von Intervalleinteilungen $(\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von $[a,b]$ in jeweils m Teilintervalle gibt es eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass die Folge der Polynome $(P_{\Delta_m})_{m \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.