10. Übungsblatt zu der Vorlesung

"Diskrete und Numerische Mathematik für Informatiker"

Frankfurt, den 14.6.2016

Abgabetermin: 21.6.2016, 12:00 – vor der Vorlesung

37.) Es sei $m \in \mathbb{N}$, und $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sei eine beliebige Knotenmenge in $\mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Für $0 \le \nu \le n-1$ definiere die Funktion $f_\nu : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\nu(x) := (x - x_\nu)_+^m.$$

Ferner seien $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$, so dass für *alle* $x \in [x_0, x_n]$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu \cdot f_\nu(x) = 0.$$

Beweisen Sie, dass für alle ν mit $0 \le \nu \le n-1$ gilt: $\lambda_\nu = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie der Reihe nach: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, ... , $\lambda_{n-1} = 0$.

Anmerkung: Die Behauptung besagt: Die Spline-Funktionen $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ sind auf dem Intervall $[x_0, x_n]$ *linear unabhängig*.

(4 Punkte)

38.) Berechnen Sie für $T := \{0, 1, 2, 3\}$ die eindeutig bestimmte kubische Spline-Funktion $s \in S_{3,3}(T)$ mit:

$$s(0) = -1,\ s(1) = -1,\ s(2) = 6,\ s(3) = 28\,,\ s'(0) = -1,\ s'(3) = 29.$$

(8 Punkte)

39.) Es sei $T := \{-1, 0, 1\}$. Geben Sie – mit Begründung – irgendeine periodische Spline-Funktion $s \in S_{3,2}(T)$ an, die nicht konstant ist.

Hinweis: Sie können Funktionswerte $s(t)$ für $t \in T$ vorgeben mit $s(-1) = s(1) \neq s(0)$.

(4 Punkte)

40.) Für $T := \{-1, 0, 1, 2\}$ betrachten wir die folgende kubische Spline-Funktion $s \in S_{3,3}(T)$:

$$s(x) := -x^3 \text{ für } x \in [-1, 0]\,,\ s(x) := 2x^3 \text{ für } x \in [0, 1],$$
$$s(x) := x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \text{ für } x \in [1, 2].$$

Ferner sei $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, die mindestens 4 mal stetig differenzierbar ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2,\ f(2) = 15\,;\ f'(-1) = -3,\ f'(2) = 21.$$

Verifizieren Sie, dass für alle $x \in [-1, 2]$ gilt:

$$|f(x) - s(x)| \le \tfrac{5}{384} \cdot ||f^{(4)}||_\infty.$$

(4 Punkte)