Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 3 15. Juni 2016

Aufgabe 9. (Orthogonalraum, 2+1+1 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Ferner sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Die Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U} : U \times U \to K$, $(u_1, u_2) \mapsto \langle u_1, u_2\rangle$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn $U \cap U^\perp = \{0\}$ gilt.

(b) Ist $\dim(V) < \infty$, so gilt: $\dim(U^\perp) \geq \dim(V) - \dim(U)$.

(c) Ist $\dim(V) < \infty$, so ist die Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U}$ wie in (a) genau dann nichtausgeartet, wenn $V = U \oplus U^\perp$ gilt.

Aufgabe 10. (Orthogonalbasis und Diagonalformensatz, 2,5+1,5 Punkte)

Gegeben sei eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$, $(x, y) \mapsto x^t A y$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Finden Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Verfahrens eine Orthogonalbasis von $\mathbb{Q}^3$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$, und geben Sie (mit Begründung) die zugehörige Matrix in Diagonalform an.

(b) Gibt es eine Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{Q}^3$ mit $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle_A) = \mathbf{1}_3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 11. (alternierende Bilinearformen, 2+2 Punkte)

Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Ferner sei V ein K-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ eine alternierende Bilinearform auf V.

(a) Zeigen Sie:

  (i) Ist $v \in V \setminus V^\perp$, so gibt es ein $v' \in V$ mit $\langle v, v'\rangle = 1$.

  (ii) Mit v, v' aus Teil (a) und $U = \langle v, v'\rangle_K$ gilt: $V = U \oplus U^\perp$.

—— bitte wenden ——

(b) Sei nun $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^4$ und

$$\mathrm{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathscr{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ bezeichnet. Nutzen Sie Teil (a), um eine Basis $\mathscr{B}$ von V zu bestimmen, für die gilt:

$$\mathrm{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12. (orthogonale Projektion, 2+1+1 Punkte)

Auf dem Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_{\mathbb{R},\leq 2}$ der reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 sei

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ferner sei $\mathscr{B}$ die Basis (e_0, e_1, e_2), wobei für jedes $i = 0, 1, 2$ die Die Polynomfunktion e_i durch $e_i(x) = x^i$ für $i \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine anisotrope symmetrische Bilinearform auf V liefert.

Bemerkung – Folgende Tatsachen aus der Analysis dürfen Sie verwenden:

- *Jede Polynomfunktion ist stetig, und auf dem Vektorraum der stetigen Funktion $C(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ linear.*
- *Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ ist $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.*

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraums $U := \langle e_0, e_1\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V$ durch das Gram-Schmidt'sche Verfahren.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(p_U) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ der orthogonalen Projektion $p_U : V \to V$ auf U bzgl. $\mathscr{B}$.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **22. Juni 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`
