

Geometrie

Sommersemester 2016

Präsenzaufgabenblatt 3

15. Juni 2016

Aufgabe P9. (Orthogonalraum)

Auf dem \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{Q}^3 mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) seien Bilinearformen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_i : \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle_i := x^t A_i y,$$

definiert für $i = 1, 2, 3$, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jedes i den Orthogonalraum von $U := \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{Q}}$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$.

Aufgabe P10. (alternierende Bilinearformen)

Sei K ein Körper mit $2 \in K^\times$. Ferner sei (V, f) ein K -Vektorraum mit einer perfekten alternierenden Bilinearform. Zeigen Sie, dass $\dim(V)$ gerade sein muss.

Tipp: Betrachten Sie die Gram'sche Matrix und deren Determinante.

Aufgabe P11. (anisotrope Bilinearformen über \mathbb{C})

Sei V ein komplexer Vektorraum mit $2 \leq \dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass es keine anisotrope symmetrische Bilinearform auf V gibt.

Tipp: Diagonalformensatz

Aufgabe P12. (Gram-Schmidt und orthogonale Projektion)

Im reellen Vektorraum \mathbb{R}^3 versehen mit dem Standardskalarprodukt sei

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}^3$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Verfahrens eine Orthonormalbasis von U .
- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der orthogonalen Projektion $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf U bezüglich der Standardbasis.

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie