Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

10. Übungsblatt (erschienen am 15.06.2016)

Aufgabe 10.1 (schriftliche Aufgabe)[2+1 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass jede Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ der partiellen Differentialgleichung (PDGL) $u_x = -u_y$ entlang der Kurve $\Gamma(t) := \{(t,t) \, : \, t \in \mathbb{R}\}$ konstant ist. Gibt es weitere solche Kurven ($\Gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ für ein Intervall I) und was bedeutet das für die Menge der Lösungen von $u_x = -u_y$?

(b) Zeigen Sie, dass es jedoch keine nicht-trivialen Kurven

$$\Gamma \, : \, t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))^T \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in C^1([0,1])$$

gibt, auf denen alle Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ konstant sind.

Aufgabe 10.2 (Votieraufgabe)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in C^2(\Omega)$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ und $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir definieren $v \, : \, M^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ durch

$$v(\xi) := u(M\xi) \quad \forall \xi \in M^{-1}(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $v \in C^2(M^{-1}(\Omega))$ und dass

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} v(\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right]_{x = M\xi},$$

wobei a_{ij} die Koeffizienten von $A := MBM^T$ sind.

Aufgabe 10.3 (schriftliche Aufgabe)[4+2+2 Punkte]

Zeigen Sie, dass das Maximumsprinzip in Satz 2.2 für allgemeine elliptische PDGLn der Form

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = f \leq 0$$

mit (in jedem Punkt $x \in \Omega$) symmetrischer und positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ gilt. Es ist ratsam, in den folgenden Schritten vorzugehen:

(a) Beweisen Sie das Maximumsprinzip für konstante (positiv definite) Diagonalmatrizen $A(x) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(b) Verwenden Sie Aufgabe 10.2, um das Maximumsprinzip für konstante (symmetrische und positiv definite) Matrizen $A(x) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu zeigen.

(c) Zeigen Sie nun, dass das Maximumsprinzip für (in jedem Punkt $x \in \Omega$) symmetrische und positiv definite (reelle) Matrizen $A(x)$ gilt.

[1] Wobei hier $M^{-1}(\Omega)$ auch für nicht invertierbare Matrizen einfach das Urbild von Ω unter M (als lineare Abbildung) beschreibt.

Aufgabe 10.4 (Programmieraufgabe)[2+2+1 Punkte]
Betrachten Sie die PDGL

$$-\Delta u(x,y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) = f(x,y), \quad (x,y)^T \in \Omega = (0,1)\times(0,1) \tag{1}$$

mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,y) = b_1(y),\ u(1,y) = b_2(y),\ u(x,0) = b_3(x),\ u(x,1) = b_4(x) \quad \text{für} \quad x,y \in (0,1).$$

Für $n \in \mathbb{N},\ h = 1/(n+1)$ ist durch

$$v^{(i+(j-1)n)} := (ih, jh) \in \Omega, \quad i,j = 1,\dots,n$$

eine äquidistante Diskretisierung von Ω mit Schrittweite h gegeben.
Ferner sei

$$F := (f^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad f^{(k)} := f(v^{(k)})$$

und

$$U := (u^{(k)})_{k=1,\dots,n^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{mit} \quad u^{(k)} := u(v^{(k)}).$$

Durch Approximation der zweiten Ableitungen mit zentralen FDs in (1) erhält man:

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= -\left[\Delta u(v)\right]_{v=v^{(k)}} \approx -D^2_{h,1}[u](v^{(k)}) - D^2_{h,2}[u](v^{(k)}) \\ &= -\frac{1}{h^2}\left(-4u(v^{(k)}) + u(v^{(k)}+he_1) + u(v^{(k)}-he_1) + u(v^{(k)}+he_2) + u(v^{(k)}-he_2)\right), \end{aligned}$$

wobei

$$D^2_{h,i}[u](v) := \frac{u(v+he_i) - 2u(v) + u(v-he_i)}{h^2}, \quad i = 1,2.$$

Sind neben $v^{(k)}$ auch die Nachbarn $v^{(k)} \pm he_i$ (mit $i = 1,2$) innere Punkte von Ω, so folgt daraus:

$$f^{(k)} \approx \frac{1}{h^2}\left(4u(v^{(k)}) - u(v^{(k-1)}) - u(v^{(k+1)}) - u(v^{(k-n)}) - u(v^{(k+n)})\right).$$

Ist (mindestens) einer der Nachbarn ein Randpunkt von Ω, so bekommt man einen analogen Ausdruck, bei dem die Dirichlet-Randbedingungen mit einfließen.
Für

$$A_h := \frac{1}{h^2}\left(I_n \otimes T + T \otimes I_n\right), \quad T := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und einen geeigneten Vektor $B_h \in \mathbb{R}^n$ (abhängig von den Dirichlet-Randbed.) gilt damit

$$A_h U + B_h \approx F.$$

Folglich ist $U_h := A_h^{-1}(F - B_h) \in \mathbb{R}^{n^2}$ eine Approximation an U.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion.

```
function [U_h] = approx_U_h(f,b1,b2,b3,b4,n),
```

die U_h in Abhängigkeit von f, b_1, b_2, b_3, b_4 und $n \in \mathbb{N}$ berechnet. Bestimmen Sie dazu zuerst B_h.

(b) Berechnen und visualisieren Sie U_h für homogene Dirichlet-Randwerte, $n = 50$ und

$$f(x,y) := \begin{cases} 300 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_1 \setminus F_2, \\ 240 & \text{falls} \quad (x,y) \in E_1 \cup E_2, \\ 180 & \text{falls} \quad (x,y) \in M, \\ -60 & \text{falls} \quad (x,y) \in F_2 \setminus (E_1 \cup E_2 \cup M), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.35^2\}, \\ F_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.3^2\}, \\ E_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.4)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ E_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-0.6)^2 + (y-0.6)^2 < 0.05^2\}, \\ M &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0.15^2 < (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 0.2^2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < 0.45\}. \end{aligned}$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie U_h für $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0$, $b_4(x) = \sin(2\pi x)$, $n = 50$ und $f \equiv 0$.

Hinweis: Mit dem folgenden MATLAB-Code lässt sich U_h geeignet visualisieren:

```
h=1/(n+1);
U_h_matrix=reshape(U_h,n,n)';
[X,Y]=meshgrid(h:h:(1-h),h:h:(1-h));
surf(X,Y,U_h_matrix,'FaceColor','interp','EdgeAlpha',0);
xlabel('x-Achse');
ylabel('y-Achse');
zlabel('u(x,y)');
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 22.06.2016 um 11:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 22.06.2016 um 11:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL10_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL10_2016_3:"beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 10 werden in den Übungen zwischen dem 22-23.06.2016 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**