## §7 Spline-Interpolation

**Konventionen 7.1:**

Im folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n$ gegeben mit

(7.1a) $\quad a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b.$

Setze

(7.1b) $\quad T := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$

Schließlich sei

(7.1c) $\quad I_\nu := [x_{\nu-1}, x_\nu]$ für $1 \le \nu \le n$.

**Definition 7.2:**

Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $s: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Spline-Funktion</u> (oder <u>Spline</u>) <u>vom Grad $m$ zur Knotenmenge $T$</u>, wenn gilt:

(S1) $s$ ist $m-1$ mal stetig differenzierbar.

(S2) Auf jedem Teilintervall $I_\nu$, $1 \le \nu \le n$, stimmt $s$ mit einem Polynom $P_\nu \in \Pi_m$ überein.

$S_{m,n}(T)$ bezeichne die Menge der Splines vom Grad $m$ zur Knotenmenge $T$.

**Beispiele 7.3:**

i) Die Splinefunktionen vom Grad 1 sind genau die Streckenzüge mit Anfangspunkt $(x_0, s(x_0))$, Endpunkt $(x_n, s(x_n))$ und Eckpunkten $(x_1, s(x_1)), \dots, (x_{n-1}, s(x_{n-1}))$.
$s$ ist durch Vorgabe der Werte $s(x_0), s(x_1), \dots, s(x_n)$

eindeutig bestimmt.

ii) Die Splines vom Grad 3 heißen <u>kubische Splines</u>.

<u>Konvention 7.4:</u>

Für $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$(7.4) \qquad (t)_+^k := \begin{cases} t^k & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

<u>Satz 7.5:</u>

Seien $m$, $s$ und die Polynome $P_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$, wie in Definition 7.2. Dann gilt:

i) Zu jedem $\nu$ mit $1 \leq \nu \leq n-1$ gibt es ein $a_\nu \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(7.5a) \qquad P_{\nu+1}(x) = P_\nu(x) + a_\nu \cdot (x - x_\nu)^m .$$

ii) Für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$(7.5b) \qquad s(x) = P_1(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \cdot (x - x_\nu)_+^m .$$

<u>Beweis:</u>

i) $s$ ist insbesondere an der Stelle $x_\nu$ (mindestens) $m-1$ mal stetig differenzierbar. Das bedeutet:

$$P_{\nu+1}^{(j)}(x_\nu) = P_\nu^{(j)}(x_\nu) \quad \text{für } 0 \leq j \leq m-1.$$

Es gibt daher ein Polynom $Q_\nu$, das die folgende Identität erfüllt:

$$P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x) = Q_\nu(x) \cdot (x - x_\nu)^m .$$

Wegen $P_{\nu+1} - P_\nu \in \Pi_m$ folgt:

$$Q_\nu \equiv a_\nu \quad \text{für ein } a_\nu \in \mathbb{R}.$$

ii) Sei etwa $x \in [x_{k-1}, x_k]$ für passendes $k$ mit $1 \le k \le n$.

Im Falle $k = 1$ ist $s(x) = P_1(x)$ wie gewünscht.

Für $2 \le k \le n$ liefert wiederholte Anwendung von i):

$$s(x) = P_k(x) = P_{k-1}(x) + a_{k-1} \cdot (x - x_{k-1})^m$$
$$= \dots$$
$$= P_1(x) + \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu \cdot (x - x_\nu)^m$$
$$= P_1(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \cdot (x - x_\nu)_+^m \quad .$$

$\square$

Im folgenden werden nur noch kubische Splines betrachtet; es ist also $m = 3$.

<u>Satz und Definition 7.6:</u>

Zu vorgegebenen $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ gibt es mindestens einen Spline $s \in S_{3,n}(T)$ mit

(7.6) $\quad s(x_j) = f_j \quad$ für $0 \le j \le n$.

$s$ ist durch jeweils eine der folgenden Randbedingungen eindeutig bestimmt:

(I) $s$ ist ein <u>natürlicher Spline</u>; das heißt:

(7.6 a) $\quad s''(a) = s''(b) = 0$.

(II) $s$ ist ein <u>periodischer Spline</u>; das heißt, es ist $f_0 = f_n$ sowie

(7.6 b) $\quad s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b)$ für $0 \le j \le 2$.

(III) Für vorgegebene $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(7.6 c) $\quad s'(a) = \gamma_1, \; s'(b) = \gamma_2$.

Beweis:

Gemäß Satz 7.5 machen wir für den gesuchten Spline $s \in S_{3,n}(T)$ den Ansatz

$$s(x) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j \cdot x^j + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu \cdot (x - x_\nu)_+^3 \quad \text{für } x \in [a, b]$$

mit $\alpha_0, \dots, \alpha_3$; $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Die Bedingungen (7.6) liefern $n+1$ lineare Gleichungen für diese Koeffizienten.

Jede der Bedingungen (I), (II), (III) liefert genau 2 weitere lineare Gleichungen – für diese Koeffizienten.

Im Falle von (II) beachte man dabei, dass die Bedingung $s(a) = s(b)$ auf die – geforderte – Bedingung $f_0 = f_n$ hinausläuft – und nicht auf eine neue unabhängige Bedingung für $s$.

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem mit $n+3$ Gleichungen und $n+3$ Variablen.

Zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $s$ können wir annehmen, dass ein homogenes lineares Gleichungssystem vorliegt. Das bedeutet insbesondere:

$$f_0 = \dots = f_n = 0;$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \text{ in Fall (III)}.$$

Zu zeigen ist: $\quad s \equiv 0$.

In allen drei Fällen gilt:

(*) $\qquad s''(a) \cdot s'(a) = s''(b) \cdot s'(b)$.

Wir setzen nun:

$$I := \int_a^b (s''(x))^2 \, dx.$$

Auf jedem <u>offenen</u> Intervall $(x_{\nu-1}, x_\nu)$, $1 \leq \nu \leq n$, stimmt $s'''$ mit einer Konstanten $c_\nu$ überein. Damit folgt durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
& I \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} (s''(x))^2 \, dx \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \left( s'' \cdot s' \Big|_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} - \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} c_\nu \cdot s'(x) \, dx \right) \\
&= s''(b) \cdot s'(b) - s''(a) \cdot s'(a) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \cdot (s(x_\nu) - s(x_{\nu-1})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus (*) und der Forderung $s(x_j) = f_j = 0$ für $0 \leq j \leq n$.
Wegen $(s'')^2 \geq 0$ und der Stetigkeit von $s''$ auf $[a, b]$ folgt weiter: $s'' \equiv 0$.
Das bedeutet: $s \in \Pi_1$ .
Schließlich folgt nun wegen $s(a) = s(b) = 0$: $s \equiv 0$.

$\square$

Beispiel:

Sei $T := \{0,1,2\}$. Wir suchen den natürlichen Spline $s \in S_{3,2}(T)$ mit:

$$s(0)=1,\ s(1)=0,\ s(2)=11;\quad s''(0)=s''(2)=0.$$

Mit dem Ansatz

$$s(x) = \alpha\cdot x^3+\beta\cdot x^2+\gamma\cdot x+\delta+a\cdot(x-1)_+^3$$

folgt weiter für alle $x\in[0,2]$:

$$s'(x) = 3\alpha\cdot x^2+2\beta\cdot x+\gamma+3a\cdot(x-1)_+^2\ ,$$

$$s''(x) = 6\alpha\cdot x+2\beta+6a\cdot(x-1)_+\ .$$

Damit erhalten wir folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\delta=1 \wedge \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \wedge 8\alpha+4\beta+2\gamma+\delta+a=11$$
$$\wedge\ \beta=0 \wedge 12\alpha+2\beta+6a=0.$$

Äquivalenzumformung liefert:

$$\beta=0 \wedge \delta=1$$
$$\wedge\ \alpha+\gamma=-1 \wedge 8\alpha+2\gamma+1+a=11 \wedge a=-2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \beta=0 \wedge \delta=1 \wedge a=-2\alpha \wedge 6\alpha+2\gamma=10 \wedge \gamma=-1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \beta=0 \wedge \delta=1 \wedge \alpha=3 \wedge \gamma=-4 \wedge a=-6$$

Die gesuchte Spline-Funktion $s\in S_{3,2}(T)$ ist also gegeben durch:

$$s(x) = 3\cdot x^3-4\cdot x+1-6\cdot(x-1)_+^3$$
$$= \begin{cases} 3\cdot x^3-4\cdot x+1 & \text{für } 0\le x\le 1 \\ -3\cdot x^3+18x^2-22x+7 & \text{für } 1\le x\le 2 \end{cases}\ .$$

<u>Konvention 7.7:</u>

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und eine stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ setzen wir

(7.7) $\quad \|g\|_\infty := \max\{|g(x)| : \ x \in [a, b]\}.$

<u>Satz 7.8:</u>

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei 4 mal stetig differenzierbar. Weiter sei $s \in S_{3,n}(T)$ der – nach Satz und Definition 7.6 (III) – eindeutig bestimmte kubische Spline mit

$$s(x_\nu) = f(x_\nu) \quad \text{für } 0 \le \nu \le n \ ,$$
$$s'(a) = f'(a) \ , \ s'(b) = f'(b).$$

Weiter setze

$$h := \max_{1 \le \nu \le n} (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Dann gilt:

(7.8) $\quad \|f - s\|_\infty \le \frac{5}{384} \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty .$

<u>Beweisidee:</u>

Für $1 \le \nu \le n$ sei $u_\nu \in \Pi_3$ die eindeutig bestimmte Lösung der Interpolationsaufgabe

$$u_\nu(x_{\nu-1}) = f(x_{\nu-1}) \quad , \quad u_\nu(x_\nu) = f(x_\nu) \ ;$$
$$u_\nu'(x_{\nu-1}) = f'(x_{\nu-1}), \quad u_\nu'(x_\nu) = f'(x_\nu).$$

Dann ist die Funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(x) := u_\nu(x) \quad , \text{ falls } x \in [x_{\nu-1}, x_\nu]$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar.

Relativ leicht zu zeigen ist – bei Übertragung der Idee des Beweises von Satz 6.16:

(7.8a) $\quad \|f - u\|_\infty \le \frac{1}{384} \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty .$

Schwer zu zeigen ist:

(7.8b) $\quad \|u - s\|_\infty \le \frac{1}{96} \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty .$

(7.8) folgt aus (7.8a) und (7.8b).

<u>Beispiel:</u>

Definiere $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sin x$.
Setze $n = 4$, $x_0 := 0$, $x_1 := \frac{\pi}{2}$, $x_2 := \pi$, $x_3 := \frac{3}{2} \cdot \pi$, $x_4 := 2\pi$.
Für den zugehörigen Spline $s \in S_{3,n}(T)$ mit

$$s(x_\nu) = \sin x_\nu \text{ für } 0 \le \nu \le 4 , \quad s'(0) = s'(2\pi) = 1$$

erhalten wir mit $h = \frac{\pi}{2}$ mittels (7.8) die folgende Abschätzung:

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{5}{384} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot 1 < 0{,}08 .$$